

Petr KUBÍČEK\*, Jaromír DRÁPALA\*\*, Alois ADAMUS\*\*\*

DIAGNOSTIKA TEPLOTNÍCH POLÍ ODVALŮ SE ZÁPAREM  
I. STACIONÁRNÍ TEPLOTNÍ POLE

DIAGNOSTICS OF TEMPERATURE FIELDS OF DUMPS WITH SPONTANEOUS FIRE  
I. STATIONARY TEMPERATURE FIELD

**Abstrakt**

Diagnostika teplotních polí odvalů se záparem umožňuje stanovit základní teplotní a tepelné charakteristiky těchto polí. Vychází se z naměřených hodnot teplot na povrchu odvalu a ve vrtech. Cílem diagnostiky je podstatně snížit počet a velikost maloprůměrových vrtů a dosáhnout maximální přesnosti při určení kvalifikovaných odhadů parametrů teplotního a tepelného pole. Získané údaje slouží jako nutný podklad pro projekty sanace nebo likvidace odvalu se záparem.

V této práci je řešen základní, nejjednodušší případ stacionárního teplotního pole odvalu, který předpokládá, že rozložení tepelných zřidel v ohnisku záparu je sféricky symetrické a hustota těchto zřidel je popsána Gaussovou funkcí. Přesně byl vypočten teplotní profil na hlavní vertikální ose, procházející středem ohniska. Pro výpočet teplot mimo tuto osu byl odvozen přibližný vztah. Jedná se o řešení Poissonovy rovnice pomocí objemového potenciálu. Řešení stacionárního teplotního pole odvalu nám umožní získat kvalifikované odhady základních parametrů tohoto pole v první aproximaci. Tyto odhady pak budou využity při řešení podstatně složitějších případů nestacionárních teplotních polí odvalů.

**Abstract**

Diagnostics of temperature fields of dumps with spontaneous fire enables to determine basic temperature and thermal characteristics of these fields. It is based on the measured temperature values on the dump surface as well as in boreholes. The diagnostics objective is to reduce considerably the number and size of small diameter bores and to achieve a maximum accuracy when giving qualified estimations of parameters of temperature and heat fields. The obtained data serve as a necessary basis for projects of maintenance or disposal of dumps with spontaneous fire.

In the present paper a basic and the simplest case of the dump stationary temperature field is solved which assumes that the distribution of heat sources in the spontaneous fire centre is spherically symmetrical and the density of these sources can be described by Gauss function. The temperature profile on the major vertical axis running through the centre point of spontaneous fire centre was calculated accurately. An approximate relation was derived for the calculation of temperatures past this axis. It is a case of the Poisson equation solution by means of the volume potential. The solution of the dump stationary temperature field will enable to obtain qualified assessments of basic parameters of this field in the first approximation. These estimations will be utilized when solving considerably more complicated cases of non-stationary temperature fields of dumps.

**Key words:** thermal parameters of spontaneous fire, spontaneous fire centre, Poisson and Laplace equations, volume potential, temperature profiles.

---

\* Prof. Ing., DrSc., Na čtvrti 14, 705 00 Ostrava - Hrabůvka - teorie

\*\* Prof. Ing., CSc., katedra neželezných kovů, rafinace a recyklace, VŠB - TU Ostrava, 708 33 Ostrava - Poruba, e-mail: Jaromir.Drapala@vsb.cz - numerické výpočty počítačem

\*\*\* Doc. Ing., Dr., Institut hornického inženýrství a bezpečnosti, VŠB - TU Ostrava, 708 33 Ostrava - Poruba, e-mail: Alois.Adamus@vsb.cz - hlavní řešitel projektu, prevence samovznícení uhlí

## 1. Úvod

Účelem diagnostiky teplotních polí odvalů se záparem je stanovení základních parametrů teplotního a tepelného pole odvalu. Tato diagnostika vychází z teplotního mapování terénu, tj. z proměření povrchových teplot a teplot ve vrtech, což je první průzkumná etapa, pomocí které se vypracuje projekt sanace odvalu. Cílem racionální diagnostiky je podstatně snížit pracnost a nákladnost teplotního mapování terénu snížením počtu a velikosti vrtů, ve kterých je nutno měřit teploty odvalu a provádění výhradně vrtů s menšími průměry než se dosud provádí. Naměřené teploty v terénu je pak nutno zpracovat zcela novým způsobem, který bude vycházet z teorie teplotních polí odvalů a umožní pomocí kvalifikovaných odhadů určit např. průběh teplotních profilů, maximální teploty v odvalu, tepelný výkon ohniska záparu, množství tepla v odvalu atd. Na základě těchto poznatků je pak možné určit množství tepla, o které je nutno odval ochladit, spotřebu vody na ochlazování a jiné parametry, které jsou nutné k projektu sanace nebo likvidace odvalu.

Teorie teplotních polí odvalů se záparem vychází z rovnic matematické fyziky, tj. z parciálních diferenciálních rovnic eliptického a parabolického typu a představuje řešení rovnice vedení tepla pro stacionární a nestacionární teplotní pole pro konkrétní podmínky na odvalech. Základem k vypracování diagnostiky těchto polí budou fyzikálně - matematické modely tvaru ohnisek záparu, které budou charakterizovány různým rozložením hustoty tepelných zřidel. Tyto modely musí s velkou pravděpodobností odpovídat charakteru ohnisek v odvalových deponiích a pro další analýzu je vhodné, aby odrážely určité mezní případy. Na druhé straně je nutno tyto modely volit tak, aby jejich matematický popis byl poměrně jednoduchý a výsledné teoretické vztahy nebyly příliš komplikované, což usnadní jejich praktické využití. V této a dalších pracích budeme předpokládat, že rozložení hustoty tepelných zřidel v ohnisku záparu je popsáno Gaussovou funkcí. Plochy, na kterých je stejná hustota tepelných zřidel, jsou soustředné kulové plochy nebo povrchy rotačních elipsoidů. Je zřejmé, že v této matematické aproximaci bude mít ohnisko záparu z hlediska tepelných zřidel „neostrou hranici“. Druhým protipólem těchto modelů je ohnisko ve tvaru válce a uvnitř tohoto válce bude konstantní hustota tepelných zřidel. Toto ohnisko má „ostrou hranici“. Uvedené modely tedy představují dva mezní případy, které mohou nastat v terénu. Jiný charakter mohou mít např. ohniska u hrany odvalu.

Vzhledem k složitosti vzniku a šíření záparů v odvalech, jejich nehomogenitě ve složení a v dalších vlastnostech, mohou výše uvedené modely ohnisek pouze aproximovat s větší či menší přesností skutečnou situaci „in situ“. Příčiny odchylek vyplývají zejména ze skutečností:

- a) nehomogenita zrnitosti v tělese odvalu a s ní související vytváření transportních cest pro pronikání vzduchu k ohnisku záparu,
- b) nehomogenní složení odvalu z hlediska obsahu uhelné hmoty,
- c) rozdíly v hodnotách koeficientů teplotní a tepelné vodivosti a dalších faktorech.

V případě, že se vyskytuje více samostatných ohnisek záparu, jejichž teplotní pole se významně nepřekrývají, analyzují se příslušná teplotní pole u každého ohniska samostatně.

Z těchto důvodů může teorie poskytnout pouze kvalifikované odhady hodnot parametrů teplotního a tepelného pole odvalu.

V praxi nastávají často případy, kdy teplotní pole odvalu se jeví po dlouhou dobu jako ustálené, kvazistacionární. Z matematického hlediska budeme tuto situaci přibližně popisovat jako stacionární teplotní pole. Řešení těchto případů je nejjednodušší. Dále budeme předpokládat, že rozložení tepelných zřidel v ohnisku je popsáno Gaussovou funkcí a ohnisko je sféricky symetrické. Za těchto předpokladů budeme řešit základní, nejjednodušší případ teplotního pole odvalu a vyřešení tohoto případu nám umožní získat odhady hodnot teplotních a tepelných charakteristik odvalu v první aproximaci. Tyto odhady pak mohou být využity při analýze podstatně složitějších situací nestacionárního teplotního pole odvalů.

Poznámka: Vzhledem k tomu, že práce bude mít několik dílů, budou matematické vztahy pro větší přehlednost číslovány zvlášť pro každou kapitolu.

## 2. Teoretické základy řešení stacionárních úloh

Budeme předpokládat, že v určitém časovém období, např. jednoho roku, které slouží k provedení průzkumu nebo určité etapy sanace, se teplotní poměry v odvalu málo mění. Dále předpokládáme, že ohnisko záparu je aktivní po dobu, která je řádově delší než trvání sanačních prací. Následně teoretické

analýzy předpokládají, že tento kvazistacionární stav budeme považovat za stacionární. V této kapitole uvedeme základní výchozí vztahy, které budeme dále používat pro výpočet parametrů stacionárního teplotního pole [1].

Teplota  $T(x,y,z,t)$  nestacionárního teplotního pole vyhovuje rovnici vedení tepla, tj. parciální diferenciální rovnici parabolického typu:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + \frac{q}{c\rho_o}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad q = q(x,y,z,t), \quad (2.1)$$

kde  $\Delta$  je Laplaceův operátor,  $a$  je koeficient teplotní vodivosti, funkce  $q$  charakterizuje tepelná zřídla,  $c$  je měrné teplo odvalu,  $\rho_o$  je objemová hmotnost odvalu a  $t$  je čas. Při stacionárním ději, kdy  $\partial T / \partial t = 0$ , obdržíme v oblasti, kde se nevyskytují tepelná zřídla rovnici Laplaceovu

$$\Delta T = 0. \quad (2.2)$$

V přítomnosti tepelných zřídla platí rovnice Poissonova

$$\Delta T = -q / \lambda, \quad \lambda = c \rho_o a, \quad (2.3)$$

kde  $\lambda$  je koeficient tepelné vodivosti. Rovnice (2.2), (2.3) jsou parciální diferenciální rovnice eliptického typu. Rovnice (2.2), (2.3) je možno řešit v omezených tělesech, pokud je zadána jedna z okrajových podmínek. Při první okrajové úloze je zadána teplota  $T_\Sigma$  na povrchu tělesa, při druhé okrajové úloze je zadána derivace  $\partial T_\Sigma / \partial n$  ve směru vnější normály k ploše  $\Sigma$  a pro třetí okrajovou úlohu platí

$$\frac{\partial T_\Sigma}{\partial n} + k(T_\Sigma - T_V) = 0, \quad (2.4)$$

kde  $k$  je koeficient výměny tepla a  $T_V$  je teplota vnějšího prostředí.

Třetí okrajová úloha (2.4) bude hrát důležitou roli v našem případě řešení teplotního pole odvalu. Tato okrajová podmínka vychází ze skutečnosti, že hustota tepelného toku  $J$  k povrchu tělesa je rovna hustotě tepelného toku  $J_V$  v obklopujícím prostředí a odpovídá výměně tepla podle Newtonova zákona na povrchu tělesa s obklopujícím prostředím, jehož teplota  $T_V$  je známá.

$$J = -\lambda \frac{\partial T_\Sigma}{\partial n}, \quad J_V = b(T_\Sigma - T_V), \quad k = b / \lambda, \quad (2.5)$$

kde  $b$  je konstanta.

Řešení Poissonovy rovnice (2.3) v prostoru lze vyjádřit pomocí objemového potenciálu, který je definován vztahem [1]:

$$T_1(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iiint_V \frac{q(\xi,\eta,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (2.6)$$

Objemový potenciál (2.6) vyjadřuje teplotu v bodě  $M(x,y,z)$ , jestliže v tělese o objemu  $V$  jsou rozložena tepelná zřídla o hustotě  $q$  a vyhovuje Poissonově rovnici (2.3) uvnitř tělesa a Laplaceově rovnici (2.2) vně tělesa.

Obrátíme nyní pozornost k řešení první okrajové úlohy pro Laplaceovu rovnici (2.2), kdy na povrchu tělesa je známá teplota  $T_\Sigma$ . Řešení okrajových úloh se provádí pomocí zřídlové funkce a k jejímu sestrojení se nejčastěji používá metoda elektrostatických obrazů [1]. Pro naše účely řešení teplotního pole odvalu bude důležitá znalost zřídlové funkce pro poloprostor  $z > 0$ , pomocí které lze napsat řešení první okrajové úlohy [1] pro Laplaceovu rovnici (2.2):

$$T_2(x,y,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\left[ (\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2 \right]^{3/2}} T_\Sigma(\xi,\eta) d\xi d\eta \quad (2.7)$$

Vztah (2.7) udává teplotu v libovolném bodě  $M(x,y,z)$  v poloprostoru  $z > 0$ , jestliže v rovině  $z = 0$  je rozložení teploty popsáno funkcí  $T_\Sigma$ . Funkce  $T_2(x,y,z)$  vyhovuje Laplaceově rovnici (2.2) v poloprostoru.

Vztahy (2.6), (2.7) jsou základní vztahy, pomocí kterých budeme přibližně analyticky řešit stacionární teplotní pole odvalu. V dalších výpočtech se bude velice často vyskytovat integrál Laplaceův - Gaussův, tj. funkce  $erf z$  a funkce  $erfc z$ , které jsou definovány vztahy:

$$erf z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi, \quad erf(z \rightarrow \infty) \rightarrow 1 \quad (2.8)$$

$$erfc z = 1 - erf z. \quad (2.9)$$

Funkce  $erf z$  je tabelována [1] a pro velké hodnoty  $z$  ji lze přibližně vyjádřit pomocí asymptotického rozvoje, tj. pomocí semidivergentní řady a platí [2]:

$$erfc z \approx \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi} z} \left[ 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1.3}{(2z^2)^2} - \dots (-1)^{n-1} \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{(2z^2)^{n-1}} \right] + R_n \quad (2.10)$$

Pro velikost zbytku  $R_n$  po  $n$ -tém členu byl odvozen vztah:

$$|R_n| < \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{(2z^2)^n} \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi} z}. \quad (2.11)$$

Pro numerický výpočet hodnot funkce  $erfc z$  počítačem se tabelované hodnoty logaritmovaly a pak byly pomocí metody nejmenších čtverců aproximovány polynomem čtvrtého stupně, tj.

$$\log(erfc z) \approx a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4, \quad z < 3,9, \quad (2.12)$$

kde

$$a_1 = -0,484; \quad a_2 = -0,295; \quad a_3 = -0,0274; \quad a_4 = +0,00235. \quad (2.13)$$

Tato aproximace se ukázala jako velice přesná. Maximální rozdíly  $max \Delta$  v % od tabelovaných hodnot jsou uvedeny v tab. 1. Funkci  $erfc z$  pak vypočteme podle vztahu (2.12).

**Tabulka 1.** Přesnost vypočtených hodnot  $erfc z$  aproximovaných podle rovnice (2.12) a (2.13).

$z$	$0 \div 0,5$	$0,5 \div 1$	$1 \div 1,5$	$1,5 \div 2$	$2 \div 3$	$3 \div 3,9$
$max \Delta$ (%)	0,15	0,18	0,2	0,06	0,41	0,34

Poznámka: Některé počítačové programy obsahují výpočet funkce  $erfc z$  s přesností větší než uvádí tab. 1.

### 3. Stacionární teplotní pole

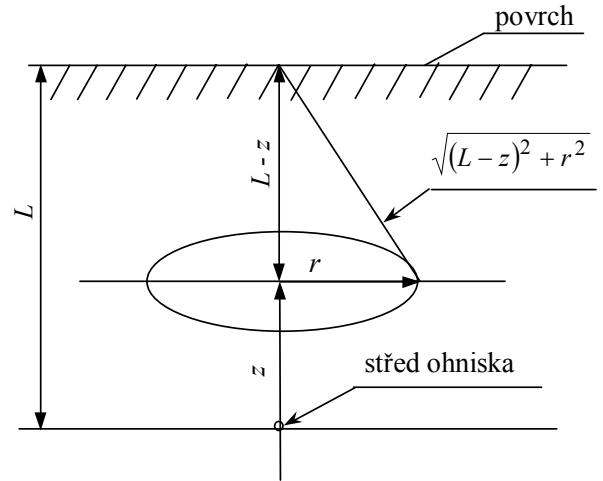
#### 3.1 Průběh teploty v odvalu v ose ohniska bez okrajové podmínky

Pro výpočet rozložení teploty v odvalu bez okrajové podmínky, tj. v neomezeném prostředí, použijeme vztah (2.6) v kap. 2 pro objemový potenciál. K tomuto účelu je nutné si explicitně vyjádřit funkci  $q(x,y,z)$ , popisující rozložení hustoty tepelných zřídél v ohnisku záparu. Uvažujme dále situaci podle obr. 3.1, kde střed ohniska se nachází v hloubce  $L$  pod povrchem a  $r$  je vzdálenost od osy,  $r^2 = x^2 + y^2$ . Rozložení hustoty tepelných zřídél v odvalu popíšeme pomocí Gaussovy funkce

$$q = q_0 e^{-\alpha r^2 - \beta z^2}, \quad (3.1)$$

kde  $q_0$  je maximální hustota tepelných zřídél ve středu ohniska,  $\alpha$ ,  $\beta$  jsou koeficienty, charakterizující rozložení zřídél. Čím větší jsou hodnoty koeficientů  $\alpha$ ,  $\beta$ , tím více jsou tepelná zřídla „lokalizována“ v blízkosti středu ohniska. Z definice funkce  $q$  – viz (3.1) je zřejmé, že v tomto přiblížení nemá ohnisko, tj. oblast obsahující tepelné zřídlo, ostré hranice. V případě, že  $\alpha = \beta$  jsou plochy se stejnými hodnotami  $q$  soustředné kulové plochy, tj. ohnisko je symetrické. Pro  $\alpha < \beta$  klesá ve směru osy  $z$  hustota tepelných zřídél rychleji než ve směru poloměru  $r$ , tj. v horizontálním směru a ohnisko lze přirovnat k zploštělému rotačnímu elipsoidu, tj. připomíná svým tvarem disk. Jestliže  $\alpha > \beta$  lze přirovnat ohnisko k protáhlému rotačnímu

elipsoidu, kde osa  $z$  je osou rotace, pro  $\alpha > \beta$  se jedná o zploštělý rotační elipsoid. Volba funkce (3.1) odráží se značnou pravděpodobností možné tvary ohniska záparu v odvalu i skutečnost, že hranice tohoto ohniska nejsou v reálných případech ostře vymezeny. Dále je tvar funkce (3.1) velice výhodný z hlediska jednoduché integrace, která je nutná k výpočtu objemového potenciálu a tedy k stanovení funkce  $T_1(x,y,z)$  – viz (2.6). Dále je nutno si uvědomit, že pokud bychom chtěli stanovit orientační "rozměry" ohniska ze vztahu (3.1), tj. parametry  $z_1, r_1$ , muselo by pro tyto parametry platit  $q(z_1, r_1) \approx 5 \cdot 10^{-2} \div 10^{-1} q_0$ . Pro větší hodnoty  $z_1, r_1$  je příspěvek z těchto tepelných zřídél k výsledné teplotě odvalu již malý nebo zanedbatelný.



**Obr. 3.1** Označení parametrů pro výpočet komponent stacionárního teplotního pole  $T_{1b}$   $i = 1, 2$ .

Podle (2.6) a označení na obr. 3.1 vypočteme část objemového potenciálu, který přísluší poloprostoru  $z > 0$  nad středem ohniska pro bod na povrchu v ose ohniska ve vzdálenosti  $L$  od středu ohniska a dosadíme za  $q$  ze vztahu (3.1).

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{q_0}{4\pi \lambda} \int_0^L \int_0^\infty \frac{2\pi r e^{-\beta z^2 - \alpha r^2}}{\sqrt{(L-z)^2 + r^2}} dr dz = \frac{q_0}{4\lambda} \int_0^L \int_0^\infty \frac{e^{-\beta z^2 - \alpha u}}{\sqrt{(L-z)^2 + u}} du dz = \\ &= \frac{q_0}{2\lambda} e^{+\alpha L^2} \int_0^L e^{-(\beta-\alpha)z^2 - 2\alpha Lz} \int_{L-z}^\infty e^{-\alpha \eta^2} d\eta dz = \frac{q_0 \sqrt{\pi}}{4\lambda \sqrt{\beta}} e^{+\alpha L^2} \int_0^L e^{-(\beta-\alpha)z^2 - 2\alpha Lz} \operatorname{erfc}[\sqrt{\alpha}(L-z)] dz, \quad (3.2) \\ u &= r^2, \quad \eta = \sqrt{(L-z)^2 + u} \end{aligned}$$

V prvním integrálu ve vztahu (3.2) jsme vyjádřili objemový element  $dV = 2\pi r dr dz$ . V této kapitole budeme řešit symetrický případ, kdy stejné hustoty tepelných zřídél jsou rozloženy na soustředných kulových plochách, tj. platí  $\alpha = \beta$  a další výpočet je pak velice jednoduchý. Při použití substitucí:

$$\xi = \sqrt{\beta}(L-z), \quad \gamma = \sqrt{\beta}L, \quad (3.3)$$

obdržíme

$$T_{11} = \frac{q_0 \sqrt{\pi}}{4\lambda \beta} e^{-\gamma^2} \int_0^\gamma e^{+2\gamma \xi} \operatorname{erfc} \xi d\xi, \quad (3.4)$$

Integrál ve vztahu (3.4) vypočteme pomocí metody per partes.

$$\int_0^\gamma e^{+2\gamma \xi} \operatorname{erfc} \xi d\xi = \frac{1}{2\gamma} (e^{+2\gamma^2} \operatorname{erfc} \gamma - 1) + \frac{1}{\sqrt{\pi}\gamma} \int_0^\gamma e^{+2\gamma \xi - \xi^2} d\xi = \frac{1}{2\gamma} (e^{+2\gamma^2} \operatorname{erfc} \gamma + e^{+\gamma^2} \operatorname{erf} \gamma - 1) \quad (3.5)$$

$$T_{11} = \frac{q_0 \sqrt{\pi}}{8 \lambda \beta \gamma} (e^{+\gamma^2} \operatorname{erfc} \gamma + \operatorname{erf} \gamma - e^{-\gamma^2}). \quad (3.6)$$

Vztah (3.6) udává tedy příspěvek k objemovému potenciálu z prostoru, omezeného rovinou  $z = 0$ , procházející středem ohniska a povrchem odvalu. Příspěvek  $T_{12}$  z dolního poloprostoru, tj.  $z < 0$ , který budeme považovat za neomezený, se vypočte zcela obdobně. Budeme-li uvažovat absolutní hodnotu  $z$ , pak platí

$$\eta = \sqrt{(L+z)^2 + u}, \quad z \rightarrow \infty, \quad \xi = \sqrt{\beta}(L+z) \quad (3.7)$$

a podle vztahů (3.2), (3.4), (3.5) lze psát

$$T_{12} = \frac{q_o \sqrt{\pi}}{8\lambda} e^{-\gamma^2} \int_{\gamma}^{\infty} e^{+2\gamma \xi} \operatorname{erfc} \xi d\xi = \frac{q_o \sqrt{\pi}}{8\lambda\beta\gamma} \left(1 - e^{+\gamma^2} \operatorname{erfc} \gamma\right). \quad (3.8)$$

Hodnotu teploty na povrchu v ose  $z$ , tj. ve vzdálenosti  $L$  od středu ohniska, lze popsat pomocí funkce  $T_1 = T_{11} + T_{12}$ , tj. pomocí vztahu (3.6) a (3.8) a tato výsledná funkce nepředstavuje skutečnou teplotu povrchu odvalu, protože do řešení nebyla zahrnuta 3. okrajová podmínka, která bere v úvahu ochlazování povrchu vnějším prostředím.

$$T_1 = \frac{q_o \sqrt{\pi}}{8\lambda\beta\gamma} \left(1 + \operatorname{erf} \gamma - e^{-\gamma^2}\right). \quad (3.9)$$

Dále budeme uvažovat důležitý případ, kdy vzhledem k velikosti koeficientu  $\beta$  je střed ohniska v dostatečné hloubce  $L$  pod povrchem a platí

$$\gamma \geq 2, \quad \operatorname{erf} \gamma \approx 1, \quad e^{-\gamma^2} \leq 1,8 \cdot 10^{-2}. \quad (3.10)$$

Za předpokladů (3.10) lze vztah (3.9) podstatně zjednodušit

$$T_1 \approx \frac{q_o \sqrt{\pi}}{4\lambda\beta} \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{\beta}L \quad (3.11)$$

a velikost teploty je nepřímo úměrná vzdálenosti  $L$ .

Vypočteme nyní teplotu ve středu ohniska, tj. maximální teplotu  $T_{o \max}$ , která opět nezahrnuje vliv okrajové podmínky na povrchu. Postup bude zcela obdobný jako v předchozích případech a budeme opět odděleně uvažovat horní a dolní poloprostor.

$$T_{o \max} = \frac{q_o}{4\pi\lambda} \int_{-\infty}^L \int_0^{\infty} \frac{2\pi r e^{-\beta(z^2+r^2)}}{\sqrt{z^2+r^2}} dr dz = \frac{q_o \sqrt{\pi}}{4\lambda\beta} \left( \int_0^{\gamma} \operatorname{erfc} \xi d\xi + \int_0^{\infty} \operatorname{erfc} \xi d\xi \right), \quad \xi = \sqrt{\beta}z. \quad (3.12)$$

Integrál na pravé straně vztahu (3.12) se vypočte metodou per partes.

$$\int_0^{\gamma} \operatorname{erfc} \xi d\xi = \xi \operatorname{erfc} \xi \Big|_0^{\gamma} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma^2} e^{-\eta} d\eta = \gamma \operatorname{erfc} \gamma + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - e^{-\gamma^2}\right), \quad \eta = \xi^2. \quad (3.13)$$

Dosadíme vztah (3.13) do rovnice (3.12) a upravíme

$$T_{o \max} = \frac{q_o}{2\lambda\beta} \left( 1 + \frac{\sqrt{\pi}\gamma}{2} \operatorname{erfc} \gamma - \frac{e^{-\gamma^2}}{2} \right) \quad (3.14)$$

Pro  $\gamma \geq 2$  lze vztah (3.14) zjednodušit přibližným vyjádřením funkce  $\operatorname{erfc} \gamma$  pomocí asymptotického rozvoje – viz vztah (2.10) a platí

$$T_{o \max} \approx \frac{q_o}{2\lambda\beta} \quad (3.15)$$

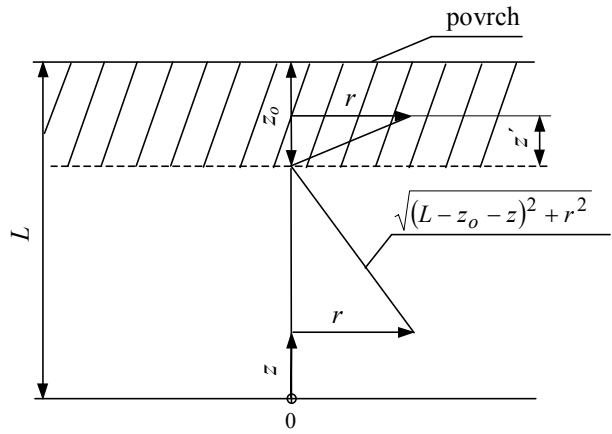
Teplota  $T_{o \max}$  udaná vztahem (3.15) nezahrnuje vliv 3. okrajové podmínky na povrchu odvalu, tj. jeho ochlazování, a proto pro skutečnou maximální teplotu  $T_{\max}$  ve středu ohniska platí:  $T_{\max} < T_{o \max}$ .

Dosud jsme vypočetli řešení Poissonovy rovnice  $T_1$  v ose na povrchu odvalu a ve středu ohniska. V dalším textu vypočteme funkci  $T_1$  v libovolném bodě  $z_o$  na ose  $z$ . Budeme uvažovat označení podle obr. 3.2. Abychom vypočetli v tomto případě objemový potenciál, je nutno uvažovat příspěvek  $T_{12}$  k tomuto potenciálu z dolního poloprostoru, tj.  $z < 0$ , který je dán vztahem (3.8). Dále musíme brát v úvahu prostor

mezi rovinami  $z = 0$  a  $z = L - z_o$  a tento příspěvek  $T_{11}(z_o)$  je vyjádřen vztahem (3.6), do kterého dosadíme místo parametru  $\gamma$  proměnnou  $\Delta\gamma$

$$\Delta\gamma = \sqrt{\beta}(L - z_o) = \gamma - \gamma_o, \quad \gamma_o = \sqrt{\beta}z_o. \quad (3.16)$$

Konečně musíme brát v úvahu prostor mezi rovinami  $z = L - z_o$  a  $z = L$ , který je na obr. 3.2 vyznačen šrafovaně. Vypočteme tento příspěvek  $T_{13}(z_i)$  zcela obdobným způsobem jako funkci  $T_{11}$  – viz (3.2), (3.4), (3.6).



**Obr. 3.2** Označení parametrů pro výpočet funkce teploty  $T_1$  v libovolném bodě  $z_o$  na ose  $z$ .

$$T_{13}(z_o) = \frac{q_o}{4\pi\lambda} \int_0^{z_o} \int_0^\infty \frac{2\pi r e^{-\beta[(L-z_o+z')^2+r^2]}}{\sqrt{z'^2+r^2}} dr dz' = \frac{q_o\sqrt{\pi}}{4\lambda\beta} e^{-\Delta\gamma^2} \int_0^{\gamma_o} e^{-2\Delta\gamma\xi} \operatorname{erfc}\xi d\xi =$$

$$= \frac{q_o\sqrt{\pi}}{8\lambda\beta\Delta\gamma} \left\{ e^{-\Delta\gamma^2} \left[ 1 - e^{-2\Delta\gamma\gamma_o} \operatorname{erfc}\gamma_o \right] - \operatorname{erf}\gamma + \operatorname{erf}\Delta\gamma \right\}, \quad \xi = \sqrt{\beta}z'. \quad (3.17)$$

Průběh teploty v ose  $z$  v horním poloprostoru odvalu je zřejmě dán funkcí  $T_1(z_o) = T_{11}(z_o) + T_{12} + T_{13}(z_o)$  a na základě vztahů (3.6), (3.16), (3.8), (3.17) lze po úpravě psát

$$T_1(z_o) = \frac{q_o\sqrt{\pi}}{8\lambda\beta} \frac{1}{\Delta\gamma} \left( 1 + 2\operatorname{erf}\Delta\gamma - \operatorname{erf}\gamma - e^{-\Delta\gamma^2 - 2\Delta\gamma\gamma_o} \operatorname{erfc}\gamma_o \right) \quad (3.18)$$

$$\gamma = \sqrt{\beta}L, \quad \Delta\gamma = \sqrt{\beta}(L - z_o), \quad \gamma_o = \sqrt{\beta}z_o$$

Přesný finální vztah (3.18) lze pro popis průběhu teploty v krátkých vrtech zjednodušit. Pro  $\gamma > 2$  je funkce  $\operatorname{erf}\gamma \approx 1$  a dále platí

$$\Delta\gamma^2 + 2\Delta\gamma\gamma_o = \gamma^2 - \gamma_o^2. \quad (3.19)$$

Za předpokladu, že je splněna nerovnost

$$e^{-(\gamma^2 - \gamma_o^2)} \operatorname{erfc}\gamma_o \ll 1, \quad (3.20)$$

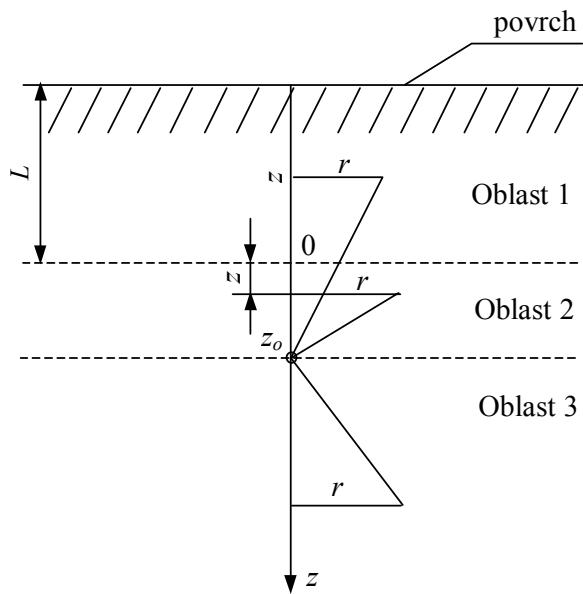
lze získat jednoduchý finální vztah, použitelný v blízkosti povrchu odvalu v ose ohniska

$$T_1(z_o) \approx \frac{q_o\sqrt{\pi}}{4\lambda\beta} \frac{1}{\Delta\gamma} \operatorname{erf}\Delta\gamma, \quad \gamma > 2. \quad (3.21)$$

Použijeme-li vztah (3.15) pro  $T_{o\max}$ , lze psát

$$T_1(z_o) \approx \frac{\sqrt{\pi}T_{o\max}}{2\Delta\gamma} \operatorname{erf}\Delta\gamma. \quad (3.22)$$

Z přesného vztahu (3.18) lze pomocí limitního přechodu vypočítat teplotu ve středu ohniska, tj. pro  $z_o = L \Rightarrow \Delta\gamma = 0, \gamma_o = \gamma$  a po výpočtu obdržíme vztah (3.15). Zde je nutné znovu upozornit, že teplota



**Obr. 3.3** Konfigurace pro výpočet funkce  $T_1(z_0)$  v dolním poloprostoru.

$$T_{11}(z_0) = \frac{q_0}{4\pi\lambda} \int_0^L \int_0^\infty \frac{2\pi r e^{-\beta(z^2+r^2)}}{\sqrt{(z_0+z)^2+r^2}} dr dz = \frac{q_0\sqrt{\pi}}{4\lambda\beta} e^{-\gamma_0^2} \int_{\gamma_0}^{\gamma+\gamma_0} e^{+2\gamma_0\xi} \operatorname{erfc}\xi d\xi, \quad (3.23)$$

$$\xi = \sqrt{\beta}(z_0+z).$$

Výpočet integrálu na pravé straně vztahu (3.23) byl proveden v rovnici (3.5), postup výpočtu je stejný, pouze proměnná  $\xi$  je rozdílně definována proti vztahu (3.3). Po výpočtu obdržíme

$$T_{11}(z_0) = \frac{q_0\sqrt{\pi}}{8\lambda\beta} \frac{1}{\gamma_0} \left[ e^{+2\gamma_0+\gamma_0^2} \operatorname{erfc}(\gamma+\gamma_0) - e^{+\gamma_0^2} \operatorname{erfc}\gamma_0 + \operatorname{erf}\gamma \right] \quad (3.24)$$

Pro  $\gamma > 2$  lze vztah (3.24) zjednodušit. Vyjádříme si přibližně funkci  $\operatorname{erfc}(\gamma+\gamma_0)$  pomocí asymptotického rozvoje – viz (2.10). Pak platí

$$e^{+2\gamma+\gamma_0+\gamma_0^2} \operatorname{erfc}(\gamma+\gamma_0) \approx \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{\pi}(\gamma+\gamma_0)} \ll 1, \quad \gamma > 2. \quad (3.25)$$

Za předpokladu, že je splněna nerovnost (3.25), lze psát

$$T_{11}(z_0) \approx \frac{q_0\sqrt{\pi}}{8\lambda\beta} \frac{1}{\gamma_0} \left( 1 - e^{+\gamma_0^2} \operatorname{erfc}\gamma_0 \right). \quad (3.26)$$

V blízkosti ohniska, tj. pro  $\gamma_0 \ll 1$ , lze pomocí přibližného vyjádření funkce  $\operatorname{erfc}\gamma_0$  Mac'Laurinovou řadou vypočít

$$T_{11}(z_0) \approx \frac{q_0}{4\lambda\beta}, \quad \gamma_0 \ll 1. \quad (3.27)$$

Dále se budeme zabývat příspěvkem k objemovému potenciálu z dolního poloprostoru. Pro další výpočty budeme orientovat v obr. 3.3 osu  $z$  směrem dolů a nejdříve vypočteme příspěvek  $T_{12}(z_0)$  z prostoru mezi horizontálními rovinami, z nichž jedna prochází středem ohniska a druhá bodem  $z_0$ . Pak platí

$T_1(z_0)$ , udaná vztahem (3.18), je vyšší než skutečná teplota v ose ohniska v horním poloprostoru, protože zde není zahrnuto ochlazování odvalu povrchem, tj. 3. okrajová podmínka.

Pro úplnost je nutno ještě vypočítat funkci  $T_1(z_0)$ , která bude popisovat průběh teploty v dolním poloprostoru – viz obr. 3.3, ve kterém jsou vyznačeny tři oblasti, které přispívají k celkovému objemovému potenciálu. Podle obr. 3.3 bude v tomto případě  $z_0$  vzdálenost libovolného bodu na ose  $z$  v dolním poloprostoru od středu ohniska. Výpočty budou obdobné jako pro horní poloprostor v předchozím textu.

Příspěvek k objemovému potenciálu  $T_{11}(z_0)$  zahrnuje oblast mezi středem ohniska a povrchem, tj.  $0 < z < L$ . Pak platí



$$T_{12}(z_o) = \frac{q_o}{4\pi\lambda} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{2\pi r e^{-\beta(z^2+r^2)}}{\sqrt{(z_o-z)^2+r^2}} dr dz = \frac{q_o\sqrt{\pi}}{8\lambda\beta} \frac{1}{\gamma_o} \left[ e^{+\gamma_o^2} \operatorname{erfc}\gamma_o - e^{-\gamma_o^2} + \operatorname{erf}\gamma_o \right] . \quad (3.28)$$

Konečně vypočteme poslední příspěvek  $T_{13}(z_o)$  k objemovému potenciálu, který zahrnuje oblast pod rovinou procházející bodem  $z_o$  a tuto oblast ve směru osy  $z$  budeme považovat za neohraničenou. Obdobně jako v předchozích případech lze psát podle obr. 3.3.

$$T_{13}(z_o) = \frac{q_o}{4\pi\lambda} \int_{z_o}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{2\pi r e^{-\beta(z^2+r^2)}}{\sqrt{(z-z_o)^2+r^2}} dr dz = \frac{q_o\sqrt{\pi}}{8\lambda\beta} \frac{1}{\gamma_o} \left[ e^{-\gamma_o^2} + \operatorname{erfc}\gamma_o \right] . \quad (3.29)$$

Pro  $\gamma_o \ll 1$  ze vztahu (3.29) plyne  $T_{13}(z_o \rightarrow 0) = q_o/(4\lambda\beta)$ . Průběh teploty  $T_1(z_o)$  v dolním poloprostoru je zřejmě dán součtem  $T_1(z_o) = \sum_{i=1}^3 T_{1i}(z_o)$  a použitím relací (3.24), (3.28), (3.29) obdržíme

$$T_1(z_o) = \frac{q_o\sqrt{\pi}}{8\lambda\beta} \frac{1}{\gamma_o} \left[ e^{+2\gamma\gamma_o+\gamma_o^2} \operatorname{erfc}(\gamma+\gamma_o) + \operatorname{erf}\gamma - 1 + 2\operatorname{erf}\gamma_o \right] \quad (3.30)$$

Vztah (3.30) vyjadřuje tedy exaktní průběh teploty  $T_1(z_o)$  v ose v dolním poloprostoru. Vzhledem k tomu, že řešení Poissonovy rovnice  $T_1(z_o)$  nezahrnuje okrajovou podmínku ochlazování odvalu povrchem, bude tato teplota vyšší nežli skutečná teplota. Rozdíl teplot však bude menší než případ  $T_1(z_o)$  pro horní poloprostor – viz (3.18).

Uvedeme nyní podmínky, které musí být splněny, aby bylo možné vztah (3.30) zjednodušit. Pro  $\gamma > 2$  si vyjádříme přibližně pomocí asymptotického rozvoje – viz vztah (2.10) první člen v hranaté závorce rovnice (3.30). Pak platí

$$e^{+2\gamma\gamma_o+\gamma_o^2} \operatorname{erfc}(\gamma+\gamma_o) \approx \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{\pi}(\gamma+\gamma_o)} \ll 1 . \quad (3.31)$$

Dále lze aproximovat

$$\operatorname{erf}\gamma - 1 \approx 0 , \quad \gamma > 2 . \quad (3.32)$$

S ohledem na vztahy (3.31) a (3.32) lze psát

$$T_1(z_o) \approx \frac{q_o\sqrt{\pi}}{4\lambda\beta} \frac{1}{\gamma_o} \operatorname{erf}\gamma_o , \quad \gamma > 2 . \quad (3.33)$$

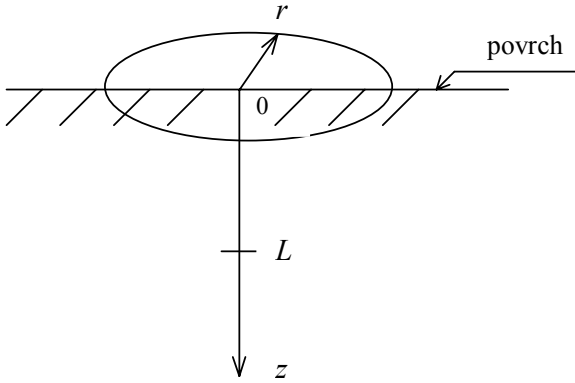
Přibližný vztah (3.33) je formálně shodný se vztahem (3.21) resp. (3.22). Porovnáme-li exaktní vztahy (3.18) a (3.30) pro průběh teploty v horním a dolním poloprostoru, vidíme, že obsahují rozdílné členy  $-e^{-\Delta\gamma^2-2\Delta\gamma\gamma_o} \operatorname{erfc}\gamma_o$  a  $e^{+2\gamma\gamma_o+\gamma_o^2} \operatorname{erfc}(\gamma+\gamma_o)$ . Teplota v horním poloprostoru je tedy poněkud menší než v dolním. Pro teplotu ve středu ohniska, tj. pro  $\gamma_o = \sqrt{\beta}$ ,  $z_o = 0$ , obdržíme ze vztahu (3.30) hodnotu  $T_{o\max}$ , udanou vztahem (3.15).

Závěrem lze tedy konstatovat, že jsme v této kapitole odvodili řešení  $T_1(z_o)$  Poissonovy rovnice ve vertikální ose ohniska pro horní a dolní poloprostor za předpokladu, že rozložení tepelných zdrojů je udáno vztahem (3.1) pro sférickou symetrii, tj.  $\alpha = \beta$ . V tomto případě představují soustředné kulové plochy místa, kde je stejná hustota tepelných zdrojů. Tento model ohniska představuje určitou mezní situaci proti reálnému případu ohniska v odvalu a uvažované ohnisko nemá ostré hranice. Řešení Poissonovy rovnice bylo odvozeno pomocí objemového potenciálu a vypočtený průběh teploty v ose nezahrnuje okrajovou podmínku, tj. ochlazování odvalu povrchem. Skutečné teploty jsou proto nižší proti teplotám, které udává funkce  $T_1(z_o)$ , definovaná vztahem (3.18) pro horní poloprostor, vztahem (3.30) pro dolní poloprostor. Tyto vztahy jsou exaktní. Pro  $\gamma = \sqrt{\beta}L > 2$ , tj. za předpokladu, že střed ohniska je v dostatečné hloubce, lze použít zjednodušené vztahy (3.21) nebo (3.22) a (3.32). Zahrnutí okrajové podmínky bude předmětem další

kapitoly. Dále je nutno uvést, že ke všem finálním odvozeným řešením je nutno připočíst konstantu  $\overline{T}_v$ , která představuje dlouhodobý průměr teploty ovzduší.

### 3.2 Zahnutí okrajové podmínky na povrchu odvalu

V předchozí kapitole jsme řešili Poissonovu rovnici bez okrajové podmínky. V této kapitole budeme řešit Laplaceovu rovnici pro poloprostor, kde okrajová úloha bude zvolena tak, aby součet obou řešení splňoval 3. okrajovou podmínku na povrchu odvalu, tj. jeho ochlazování vnějším prostředím. Řešení opět provedeme ve vertikální ose ohniska.



Obr. 3.4 Konfigurace k výpočtu funkce  $T_2(z_o)$ .

Budeme uvažovat vztah (2.7) v kap.2, který udává řešení Laplaceovy rovnice pro poloprostor, kde v rovině  $z = 0$  je zadána povrchová teplota  $T_\Sigma(x,y)$ . Vzhledem k tomu, že hledáme řešení v ose  $z$  – viz obr. 3.4, je  $x = y = 0$ ,  $z = z_o$ ,  $\xi^2 + \eta^2 = r^2$ . Střed ohniska se nachází v hloubce  $L$  pod povrchem a na vertikální ose v bodě  $z = z_o = 0$  bude maximální povrchová teplota  $T_{\Sigma \max}$ . Rozložení teploty povrchu odvalu  $T_\Sigma(r)$  získáme z měření povrchové teploty odvalu a tuto funkci budeme aproximovat Gaussovou křivkou

$$\begin{aligned} T_\Sigma(r) &\approx (T_{\Sigma \max} - T_\infty) e^{-\kappa r^2} + T_\infty, \\ {}^\circ T_\Sigma(r) &\approx T_\Sigma(r) - T_\infty, \\ {}^\circ T_{\Sigma \max} &\approx T_{\Sigma \max} - T_\infty. \end{aligned} \quad (3.34)$$

kde  $\kappa$  je koeficient, který určíme např. metodou nejmenších čtverců z naměřených hodnot,  $T_\infty$  je teplota povrchu ve velké vzdálenosti  $r$ . Dosadíme  ${}^\circ T_\Sigma(r)$  ze vztahu (3.34) do relace (2.7). Pak platí

$$\begin{aligned} T_2(z_o) &= \frac{\Delta T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_o e^{-\kappa r^2}}{(\xi^2 + \eta^2 + z_o^2)^{3/2}} d\xi d\eta = z_o \Delta T \int_0^\infty \frac{r e^{-\kappa r^2}}{(r^2 + z_o^2)^{3/2}} dr = \\ &= \Delta T z_o e^{+\kappa z_o^2} \int_0^{1/z_o} e^{-\kappa/\eta^2} d\eta = \Delta T e^{+\kappa z_o^2} \int_0^1 e^{-\kappa z_o^2/\xi^2} d\xi, \\ r^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad d\xi d\eta &= 2\pi r dr, \quad u = r^2, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{u + z_o^2}}, \quad \xi = z_o \eta \end{aligned} \quad (3.35)$$

kde  $\Delta T$  je neznámý parametr, který jsme dosadili místo  ${}^\circ T_{\Sigma \max}$ , který určíme z 3. okrajové úlohy a vyjádřili jsme element plochy  $d\xi d\eta = 2\pi r dr$ . Poslední integrál v pravé straně vztahu (3.35) se vypočte pomocí substituce  $u = 1/\xi^2$ , metody per partes a substituce  $v = \sqrt{u}$  a platí

$$\int_0^1 e^{-\kappa z_o^2/\xi^2} d\xi = e^{-\kappa z_o^2} - \sqrt{\pi \kappa} z_o \operatorname{erfc} \sqrt{\kappa} z_o \quad (3.36)$$

Dosadíme relaci (3.35) do vztahu (3.36) a obdržíme

$$T_2(z_o) = \Delta T f(\omega), \quad f(\omega) = 1 - \sqrt{\pi} \omega e^{+\omega^2} \operatorname{erfc} \omega, \quad \omega = \sqrt{\kappa} z_o. \quad (3.37)$$

Vztah (3.37) je finálním řešením Laplaceovy rovnice pro poloprostor na vertikální ose ohniska v případě, že povrchová teplota je popsána funkcí (3.34).  $\Delta T$  je neznámý parametr, který určíme v následujícím textu z procesu ochlazování povrchu odvalu ovzduším, tj. z 3. okrajové úlohy - viz vztah (2.4).

Výsledné řešení Poissonovy rovnice  $T(z_o)$  na vertikální ose, které bude respektovat 3. okrajovou úlohu, je dáno rozdílem řešení

$$T(z_o) = T_1(z_o) - T_2(z_o). \quad (3.38)$$

Vyjádříme si explicitně řešení  $T(z_o)$  v blízkosti povrchu odvalu, tj. pro  $\Delta\gamma = \sqrt{\beta}(L - z_o) \approx \gamma$ ,  $z_o \ll L$ ,  $\gamma_o \approx 0$ . Z exaktního vztahu (3.18) pro  $T_1(z_o)$  obdržíme rovnici (3.9), do které dosadíme ze vztahu (3.15). S ohledem na vztah (3.37) pro  $T_2(z_o)$  bude v blízkosti povrchu platit

$$T(z_o) \approx \frac{\sqrt{\pi} T_{o\max}}{4\gamma} (1 + \operatorname{erf} \gamma - e^{-\gamma^2}) - \Delta T (1 - \sqrt{\pi} \omega e^{+\omega^2} \operatorname{erfc} \omega) + T_\infty, \quad (3.39)$$

$$\gamma = \sqrt{\beta} L, \quad \omega = \sqrt{\kappa} z_o.$$

V dalších finálních vztazích nebudeme pro jednoduchost stále uvádět konstantu  $T_\infty = \bar{T}_v$ , kde  $\bar{T}_v$  je průměrná roční teplota ovzduší. Uvažujme nyní vztah (2.4) pro 3. okrajovou úlohu. Abychom vypočetli derivaci  $\partial T_\Sigma / \partial n$  ve směru vnější normály, je nutno vypočíst

$$\frac{dT(z_o \rightarrow 0)}{dz_o} = \frac{dT_1(z_o \rightarrow 0)}{dz_o} - \frac{dT_2(z_o \rightarrow 0)}{dz_o}. \quad (3.40)$$

$$-\frac{dT_1(z_o \rightarrow 0)}{dz_o} \approx \frac{dT_1(\gamma)}{dL} = \frac{\sqrt{\pi\beta} T_{o\max}}{4\gamma} \left[ 2 \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \gamma \right) e^{-\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} (1 + \operatorname{erf} \gamma - e^{-\gamma^2}) \right] \approx \quad (3.41)$$

$$\approx -\frac{\sqrt{\pi\beta} T_{o\max}}{2\gamma^2} (1 - \gamma^2 e^{-\gamma^2}) \approx -\frac{\sqrt{\pi\beta} T_{o\max}}{2\gamma^2}, \quad \gamma > 2.$$

Poslední přibližné výrazy v pravé straně (3.41) platí za předpokladu, že střed ohniska je v dostatečné hloubce  $L$  pod povrchem, kdy  $\gamma = \sqrt{\beta} L > 2$  a lze je použít jen při splnění tohoto předpokladu. Funkce  $T_1(\gamma)$  je dána vztahem (3.9).

Ze vztahu (3.37) vypočteme

$$\frac{dT_2(z_o)}{dz_o} = -\sqrt{\pi\kappa} \Delta T \left[ (1 + 2\omega^2) e^{+\omega^2} \operatorname{erfc} \omega - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \omega \right], \quad (3.42)$$

$$\frac{dT_2(z_o \rightarrow 0)}{dz_o} = -\sqrt{\pi\kappa} \Delta T. \quad (3.43)$$

Při výpočtu derivace ve směru vnější normály k povrchu  $\partial T_\Sigma / \partial n$  je nutno si uvědomit, že směr vzrůstu  $L$  je opačný vzhledem k směru vzrůstu  $z_o$ . Vliv okrajové podmínky v tomto případě zvětšuje výsledný teplotní gradient u povrchu a platí - viz (3.41), (3.43)

$$\frac{\partial T_\Sigma}{\partial n} \approx - \left( \frac{\sqrt{\pi\beta}}{2\gamma^2} T_{o\max} + \sqrt{\pi\kappa} \Delta T \right), \quad \gamma > 2. \quad (3.44)$$

Uvažujme opět 3. okrajovou podmínku (2.4). Z měření v terénu známe maximální teplotu povrchu  $T_{\Sigma\max}$ , tj. teplotu v bodě  $z_o = 0$  na vertikální ose, procházející středem ohniska. Dále známe teplotu vnějšího prostředí, tj. teplotu ovzduší  $T_v$  a koeficient výměny tepla  $k$ . Zavedeme označení  $\Delta T_{o\max}$

$$\Delta T_{o\max} = T_{\Sigma\max} - T_v \quad (3.45)$$

S ohledem na vztahy (3.44) a (3.45) lze přepsat 3. okrajovou podmínku

$$\frac{\sqrt{\pi\beta}}{2\gamma^2} T_{o\max} + \sqrt{\pi\kappa} \Delta T = k\Delta T_{o\max} , \quad \gamma > 2 , \quad (3.46)$$

kde  $\Delta T_{o\max}$  udává vztah (3.15). Vztah (3.46) je finální rovnicí pro 3. okrajovou podmínku s neznámým parametrem  $\Delta T$ . Pravou stranu vztahu (3.15) určíme z měření v terénu.

Napišeme nyní výsledné řešení Poissonovy rovnice, které zahrnuje 3. okrajovou podmínku, tj. funkci  $T(z_o)$  popisující průběh teploty ve vertikální ose v poloprostoru nad středem ohniska. Vyjdeme ze vztahů (3.38), (3.18) a (3.37). Vzhledem k tomu, že toto řešení budeme používat pro popis průběhu teploty v krátkých vrtech, lze použít místo vztahu (3.18) přibližné řešení  $T_1(z_o)$ , udané vztahem (3.22).

Pak platí

$$T(z_o) \approx \frac{\sqrt{\pi} T_{o\max}}{2\Delta\gamma} \operatorname{erf} \Delta\gamma - \Delta T \left( 1 - \sqrt{\pi} \omega e^{+\omega^2} \operatorname{erfc} \omega \right) , \quad (3.47)$$

$$\Delta\gamma = \sqrt{\beta} (L - z_o) , \quad \omega = \sqrt{\kappa} z_o , \quad \gamma = \sqrt{\beta} L \geq 2 .$$

Pro experimentálně zjištěnou povrchovou teplotu  $T_{\Sigma\max}$  musí podle vztahu (3.47) pro  $z_o = 0$  platit pro  $\gamma > 2$ , tj.  $\operatorname{erf} \gamma \approx 1$

$${}^\circ T_{\Sigma\max} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma} T_{o\max} - \Delta T , \quad \gamma \geq 2 , \quad (3.48)$$

$${}^\circ T_{\Sigma\max} = T_{\Sigma\max} - T_\infty \quad \dots \text{viz (3.34)}$$

Rovnice (3.48) je druhou finální rovnicí. Z rovnic (3.46) a (3.48) lze eliminovat neznámý parametr  $\Delta T$  a po výpočtu obdržíme výslednou rovnici, která zahrnuje splnění 3. okrajové podmínky

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma} T_{o\max} \left( \frac{1}{L} + \sqrt{\pi\kappa} \right) - \sqrt{\pi\kappa} {}^\circ T_{\Sigma\max} \approx k\Delta T_{o\max} , \quad \gamma \geq \sqrt{\beta} L \geq 2 . \quad (3.49)$$

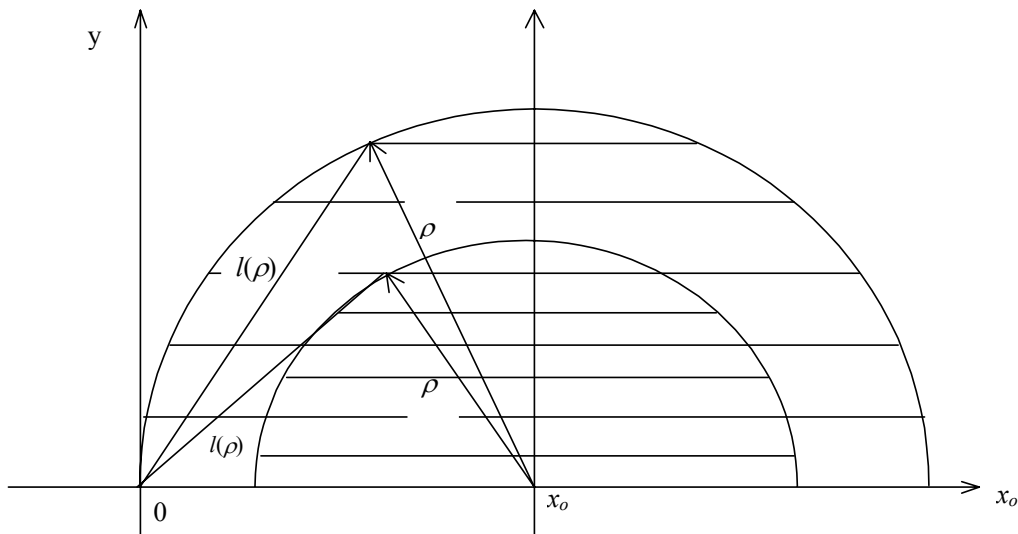
V rovnici (3.49) jsou parametry  $\kappa$ ,  $k$ ,  ${}^\circ T_{\Sigma\max}$ ,  $\Delta T_{o\max}$  známé, protože je lze určit z měření v terénu. Neznámé parametry jsou  $T_{o\max}$ ,  $\beta$ ,  $L$ .

Závěrem této kapitoly lze konstatovat, že byla odvozena funkce  $T(z_o)$ , udaná vztahem (3.47), která popisuje průběh teploty ve vertikální ose nad středem ohniska pro  $\gamma > 2$  a zahrnuje v parametru  $\Delta T$  3. okrajovou podmínku. Pro tento parametr  $\Delta T$  byly odvozeny rovnice (3.46) a (3.48). Známe-li z měření v terénu teploty  $T_{\text{exp}}(z_{oi})$  v krátkých vrtech, lze z rovnic (3.46) až (3.48) určit základní parametry ohniska, tj. maximální hustotu tepelných zřídél  $q_o$  - viz vztah (3.15) pro  $T_{o\max}$ , rozložení tepelných zřídél, charakterizované parametrem  $\beta$ , a hloubku  $L$  ohniska pod povrchem. Konkrétní postup pro jejich určení bude uveden

v druhém dílu práce. Jestliže není splněna podmínka  $\gamma > 2$ , je nutno pro  $T_1(z_o)$  použít přesný vztah (3.18) a postup výpočtu bude stejný jako v této kapitole, ale výsledné vztahy budou komplikovanější. Průběh teploty  $T(z_o)$  v ose v dolním poloprostoru, tj. pod středem ohniska, udává opět relace (3.38), do které dosadíme za  $T_1(z_o)$  přesný vztah (3.30) nebo přibližné výrazy (3.32) resp. (3.33). Vztahy (3.46) a (3.48), obsahující  $\Delta T$ , zůstávají v platnosti.

### 3.3 Průběh teploty mimo osu ohniska

Uvažujme opět vertikální osu  $z$ , která prochází středem ohniska a do průsečíku této osy s povrchem umístíme počátek souřadnic. Na povrchu odvalu, ve vzdálenosti  $x_0$  od této osy, povedeme rovnoběžku s osou  $z$ , která je opět kolmá k povrchu. V této kapitole vypočteme přibližně průběh teploty v odvalu na této rovnoběžce, tj. průběh teploty mimo vertikální osu ohniska.



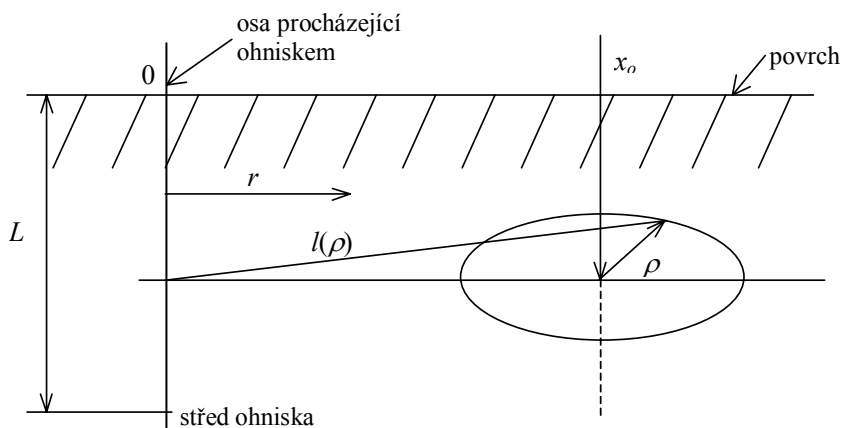
**Obr. 3.5** Konfigurace k výpočtu průběhu teploty mimo osu ohniska.

Uvažujme dále označení podle obr. 3.5, který ilustruje označení os  $x$ ,  $y$  na povrchu nebo v rovině rovnoběžné s povrchem v hloubce  $z_0$  pod povrchem. V dalším textu provedeme opět výpočet objemového potenciálu obdobným způsobem jako v kap. 3.1 a zřídlové funkce pro poloprostor podle kap. 3.2. Abychom mohli tyto výpočty provést stejným způsobem, je nutno nejdříve odvodit vztah pro střední hodnotu kvadrátu průvodiče  $\bar{l}^2(\rho)$ . Podle obr. 3.5 platí pro body  $x$ ,  $y$  na kružnici o poloměru  $\rho$  a pro  $l(\rho)$ .

$$(x - x_0)^2 + y^2 = \rho^2, \quad l^2(\rho) = x^2 + y^2 = \rho^2 + 2xx_0 - x_0^2, \quad (3.50)$$

$$\bar{l}^2(\rho) = \frac{1}{2\rho} \int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} (\rho^2 - x_0^2 + 2xx_0) dx = \rho^2 + x_0^2. \quad (3.51)$$

Vztah (3.51) pro  $\bar{l}^2(\rho)$  je základním vztahem, který umožňuje velmi přibližné výpočty průběhů teplot mimo vertikální osu  $z$ , která prochází středem ohniska záparu.



**Obr. 3.6** Konfigurace k přibližnému výpočtu funkce  $T_{11}(z_0)$  mimo osu ohniska.

Budeme uvažovat obr. 3.6 a vypočteme obdobně jako ve vztahu (3.2) část objemového potenciálu, který přísluší objemu mezi středem ohniska a povrchem. V našem mimoosovém případě je však nutné dosadit místo  $r^2$  funkci  $\bar{l}^2(\rho)$  do exponentu a dále místo  $r$  poloměr  $\rho$ .

$$T_{11}(x_o) = \frac{q_o}{4\pi\lambda} \int_0^L \int_0^\infty \frac{2\pi\rho e^{-\beta z^2 - \beta \bar{l}^2(\rho)}}{\sqrt{(L-z)^2 + \rho^2}} d\rho dz = \frac{q_o\sqrt{\pi}}{8\lambda\beta\gamma} e^{-\beta x_o^2} \left( e^{+\gamma^2} \operatorname{erfc}\gamma + \operatorname{erf}\gamma - e^{-\gamma^2} \right). \quad (3.52)$$

Hodnotu teploty  $T_1(x_o)$  na povrchu ve vzdálenosti  $x_o$  od vertikální osy, procházející středem ohniska, vypočteme obdobně jako vztah (3.9) a s ohledem na (3.51), (3.52) lze psát

$$T_1(x_o) = \frac{q_o\sqrt{\pi}}{8\lambda\beta\gamma} e^{-\beta x_o^2} \left( 1 + \operatorname{erf}\gamma - e^{-\gamma^2} \right). \quad (3.53)$$

Porovnáme-li vztahy (3.52), (3.53) se vztahy (3.6), (3.9), je zřejmé, že průběh teploty ve vzdálenosti  $x_o$  od osy ohniska se liší od průběhu teploty v ose ohniska faktorem  $e^{-\beta x_o^2}$ , ostatní výrazy zůstávají stejné. Stejně výsledky bychom obdrželi i pro  $T_1(z_o, x_o)$  - viz (3.18), (3.30).

Obrátíme nyní pozornost k výpočtu zřídlové funkce pro poloprostor ve vzdálenosti  $x_o$  od osy, procházející ohniskem. Výpočet provedeme podle vztahu (3.35), kde opět dosadíme místo  $r$  poloměr  $\rho$  a do exponentu místo  $r^2$  funkci  $\bar{l}^2(\rho)$ . Pak lze psát

$$T_2(z_o, x_o) = z_o \Delta T \int_0^\infty \frac{\rho e^{-\kappa \bar{l}^2(\rho)}}{(\rho^2 + z_o^2)^{3/2}} d\rho = \Delta T e^{-\kappa x_o^2} \left( 1 - \sqrt{\pi} \omega e^{+\omega^2} \operatorname{erfc}\omega \right), \quad \omega = \sqrt{\kappa} z_o. \quad (3.54)$$

Porovnáme-li vztah (3.54) se vztahem (3.37) je zřejmé, že se liší pouze exponenciálním faktorem  $e^{-\kappa x_o^2}$ , který zahrnuje vliv vzdálenosti  $x_o$  od osy, procházející středem ohniska.

Vyšetříme nyní okrajové podmínky na povrchu odvalu ve vzdálenosti  $x_o$  od osy, procházející středem ohniska. Podle vztahu (3.34) platí pro teplotu na povrchu

$${}^\circ T_\Sigma(x_o) = {}^\circ T_{\Sigma \max} - e^{-\kappa x_o^2}. \quad (3.55)$$

S ohledem na předchozí výpočty přepíšeme vztah (3.48), do kterého zahrneme faktory  $e^{-\beta x_o^2}, e^{-\kappa x_o^2}$

$${}^\circ T_{\Sigma \max} e^{-\kappa x_o^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma} e^{-\beta x_o^2} - \Delta T e^{-\kappa x_o^2}. \quad (3.56)$$

Aby byl splněn vztah (3.56) pro teplotu na povrchu ve vzdálenosti  $x_o$  od osy je nutné, aby platilo

$$\beta = \kappa. \quad (3.57)$$

Dále přepíšeme vztah (3.46), respektující 3. okrajovou podmínku, do kterého dosadíme za  $\Delta T_{o \max}$  ze vztahu (3.45) a vztah (3.57)

$$\frac{\sqrt{\pi\beta}}{2\gamma^2} T_{o \max} e^{-\beta x_o^2} + \sqrt{\pi\beta} \Delta T e^{-\beta x_o^2} = k {}^\circ T_{\Sigma \max} e^{-\beta x_o^2} \quad (3.58)$$

kde pro stacionární stav platí  $\bar{T}_v = T_\infty$  - viz (3.34).

S ohledem na vztah (3.47) a na vypočtený faktor  $e^{-\beta x_o^2}$  můžeme napsat finální vztah pro průběh teploty ve vzdálenosti  $x_o$  od osy, procházející středem ohniska:

$$T(z_o, x_o) \approx \left[ \frac{\sqrt{\pi} T_{o \max}}{2\Delta\gamma} \operatorname{erf}\Delta\gamma - \Delta T \left( 1 - \sqrt{\pi} \gamma_o e^{+\gamma_o^2} \operatorname{erfc}\gamma_o \right) \right] e^{-\beta x_o^2}, \quad (3.59)$$

$$\Delta\gamma = \sqrt{\beta}(L - z_o), \quad \gamma_o = \sqrt{\beta} z_o = \omega, \quad \gamma = \sqrt{\beta}L \geq 2, \quad \beta = \kappa.$$

Vztah (3.59) lze výhodně využít v praxi pro přibližné stanovení parametru  $\beta$ , který charakterizuje rozložení hustot tepelných zřidel v ohnisku - viz (3.1). Změříme-li teploty na povrchu a v podpovrchových vrtech v oblasti maxima teploty na povrchu, tj. v ose ohniska a mimo osu ohniska ve vzdálenosti  $x_o$ , bude platit - viz (3.59)

$$\frac{T(z_o, x_o)}{T(z_o, x_o = 0)} = e^{-\beta x_o^2} \quad (3.60)$$

Vzhledem k tomu, že z měření v terénu známe levou stranu rovnice (3.60), lze z této rovnice stanovit hodnotu  $\beta$ . Zde je nutno si uvědomit, že k výpočtu průběhu teploty v bodě  $x_o$ , tj. mimo osu ohniska, jsme použili střední hodnoty  $\bar{l}^2(\rho)$  - viz (3.51). Výsledný vztah  $T(z_o, x_o)$  - (3.59) je proto vzhledem k závislosti na  $x_o$  jednoduchý, ale pouze přibližný a lze ho použít pro hodnoty  $\sqrt{\beta}x_o < 1$ . Podrobněji se budeme zabývat touto problematikou při řešení nestacionárního pole.

### 3.4 Výpočet tepelného výkonu ohniska

Pro přibližný výpočet tepelného výkonu  $P$  ohniska použijeme vztah (3.1) pro  $\alpha = \beta$ , do kterého dosadíme s ohledem na vztah (3.60)  $r = x_o$ . Výpočet rozdělíme na horní poloprostor a dolní poloprostor. Tyto poloprostory jsou vymezeny horizontální rovinou, procházející středem ohniska. Pro objemový element  $dV$  platí  $dV = 2 \pi x_o dx_o dz$ . Pak lze pro tepelný výkon  $P$  ohniska psát

$$P = 2\pi q_o \int_0^\infty x_o e^{-\beta x_o^2} \left( \int_0^L e^{-\beta z^2} dz + \int_0^\infty e^{-\beta z^2} dz \right) dx_o = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^{3/2} q_o (\text{erf } \gamma + 1) \approx q_o \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^{3/2}, \quad \gamma \geq 2. \quad (3.61)$$

Vzdálenost  $z$  je ve vztahu (3.61) orientována od středu ohniska a odval ve směru horizontálním i v dolním poloprostoru považujeme za nekonečné prostředí. Podmínka  $\gamma \geq 2$  ve vztahu (3.61) dokumentuje případ, kdy je střed ohniska v dostatečné hloubce a výsledný vztah bylo možno zjednodušit.

Uvažované ohnisko záparu, ve kterém je rozložení hustoty tepelných zřidel popsáno funkcí (3.1), nemá ostré hranice a jak již bylo uvedeno, popisuje tento model mezní případ. Vypočteme nyní pro názornost tepelný výkon v kouli o poloměru  $R_o$  se středem v ohnisku. Pro příslušný tepelný výkon  $P(R_o)$  zřejmě platí:

$$P(R_o) = 4\pi q_o \int_0^{R_o} R^2 e^{-\beta R^2} dr = q_o \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^{3/2} (\text{erf } \rho_o - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho_o e^{-\rho_o^2}), \quad (3.62)$$

$$R^2 = r^2 + z^2, \quad \rho_o = \sqrt{\beta} R_o,$$

kde  $z$  je vzdálenost do středu ohniska ve vertikálním směru. Budeme nyní volit hodnotu  $\rho_o$  a ze vztahu (3.62) obdržíme:

$$\rho_o^2 = \beta R_{o1}^2 = 2 \Rightarrow P(R_{o1}) = 0,74 q_o \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^{3/2}, \quad (3.63)$$

$$\rho_o^2 = \beta R_{o2}^2 = 3 \Rightarrow P(R_{o2}) = 0,888 q_o \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^{3/2}. \quad (3.64)$$

Porovnáme-li vztah (3.63) se vztahem (3.61) pro  $\gamma \geq 2$  je zřejmé, že v kouli o poloměru  $R_{o1}$  je soustředěno 74% tepelného výkonu celého ohniska, v kouli o poloměru  $R_{o2}$  - viz (3.64), je soustředěno 89% tepelného výkonu  $P$  ohniska.

Vyjádříme nyní teplotu  $T_{o \max}$  ze vztahu (3.15) pomocí tepelného výkonu  $P$  - viz (3.61) a pro  $\gamma \geq 2$  platí:

$$T_{o \max} \approx \frac{\sqrt{\beta} P}{2 \lambda \pi^{3/2}}, \quad \frac{T_{o \max}}{\gamma} = \frac{P}{2 \lambda \pi^{3/2} L} \quad \gamma \geq 2. \quad (3.65)$$

Pro teplotu  $T_1(z_o)$  ze vztahu (3.21) lze pak psát

$$T_1(z_o) \approx \frac{P}{4\lambda\pi} \frac{\operatorname{erf}\left\{\sqrt{\beta}(L-z_o)\right\}}{L-z_o}, \quad \gamma = \sqrt{\beta}L \geq 2. \quad (3.66)$$

Ve vztazích (3.65), (3.66) jsme tedy vyjádřili  $T_{o\max}$  a teplotní průběh  $T_1(z_o)$  pomocí tepelného výkonu ohniska. Ze vztahu (3.65) pro  $T_{o\max}$  plyne, že při  $P = \text{konst.}$  roste  $T_{o\max}$  s růstem  $\sqrt{\beta}$ , tj. roste se zmenšováním zóny, ve které jsou uložena tepelná zřídla, což odpovídá fyzikální podstatě jevu.

Dále je ze vztahu (3.66) zřejmé, že v případě, kdy určíme z měření teplot na povrchu a v krátkých vrtech parametry  $L$ ,  $\Delta T$  – viz např. (3.48), lze pak vypočíst  $T_{o\max} / \gamma$  a tím přímo určíme tepelný výkon  $P$  ohniska.

### 3.5 Výpočet množství tepla v odvalu

Provedeme nejjednodušší přibližný výpočet množství tepla  $Q$  v odvalu, které bylo vyprodukováno ohniskem o tepelném výkonu  $P$ . Odval budeme považovat v horizontálním směru za neomezený, ve vertikálním směru je v horním poloprostoru omezen povrchem, tj. vzdáleností  $L$  od středu ohniska a v dolním poloprostoru vzdáleností  $z_h$  od ohniska. Omezení vzdálenosti  $z_h$  bude provedeno v kap. 3.7. Pro výpočet použijeme vztah (3.22) pro funkci  $T_1(z_o)$ , ve kterém pro zjednodušení zápisů nahradíme  $\Delta y$  proměnnou  $\eta = \sqrt{\beta}z$ , kde vzdálenost  $z$  je orientována od středu ohniska. Množství tepla, které odpovídá teplotě  $T_1(z_o)$ , označíme  $Q_1$ . Znovu připomeneme, že funkce  $T_1(z_o)$  byla vypočtena pomocí objemového potenciálu

a nezahrnuje okrajovou podmínku. Dále je nutno vzít v úvahu průběh teploty  $T_2(z_o)$  – viz (3.37), (3.38), který zahrnuje okrajovou podmínku a odpovídající množství tepla označíme  $Q_2$ .

Budeme brát v úvahu vztah (3.22), resp. (3.33), dále vztah (3.60) a objemový element  $dV = 2\pi x_o dx_o dz$ . Pro množství tepla  $Q_1$  bude pak platit

$$\begin{aligned} Q_1 &= c\rho_o \frac{\sqrt{\pi}T_{o\max}}{2} 2\pi \int_0^\infty x_o e^{-\beta x_o^2} \left( \int_0^L \frac{\operatorname{erf} \eta}{\eta} dz + \int_0^{z_h} \frac{\operatorname{erf} \eta}{\eta} dz \right) dx_o = \\ &= c\rho_o \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^{3/2} \frac{T_{o\max}}{2} \left( \int_0^{\sqrt{\beta}L} \frac{\operatorname{erf} \eta}{\eta} d\eta + \int_0^{\sqrt{\beta}z_h} \frac{\operatorname{erf} \eta}{\eta} d\eta \right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Abychom mohli vypočíst integrál na pravé straně vztahu (3.67), je vhodné si vyjádřit funkci  $\operatorname{erf} \eta$  pomocí polynomu

$$\operatorname{erf} \eta \approx \sum_{n=1}^4 a_n \eta^n \quad 0 \leq \eta \leq \eta_m. \quad (3.68)$$

$$a_1=1,175; \quad a_2=-0,1452; \quad a_3=-0,270; \quad a_4=0,0869 \quad (3.69)$$

Polynom (3.68), (3.69) aproximuje funkci  $\operatorname{erf} \eta$  s přesností  $p$ , která je uvedena v tab.2.

Tab.2. Přesnost  $p$  pro různé hodnoty  $\eta$  v polynomu funkce (3.68).

$\eta$	0 ÷ 0,1	0,1 ÷ 0,2	0,2 ÷ 0,4	0,4 ÷ 1,7
$p$ [%]	< 3,7	3,7 ÷ 1,9	1,9 ÷ 1	< 1

Pro integrál ve vztahu (3.67) pak platí:

$$\int_0^{\sqrt{\beta}z} \frac{\operatorname{erf} \eta}{\eta} d\eta \approx \sum_{n=1}^4 \frac{a_n}{n} \eta^n \dots \quad \eta = \sqrt{\beta}z \leq \eta_m, \quad (3.70)$$



kde budeme uvažovat  $\eta_m = 1,7$  a odtud plyne  $\operatorname{erf} \eta_m \approx 1$ ,  $\ln \eta_m = 0,5306$ .

Pro  $\eta > \eta_m$  lze psát

$$\int_0^{\sqrt{\beta} z} \frac{\operatorname{erf} \eta}{\eta} d\eta \approx 1,53 + \ln \eta - \ln \eta_m. \quad (3.71)$$

Hodnotu 1,53 ve vztahu (3.71) obdržíme ze vztahu (3.70) pro  $\eta = 1,7$ . Výsledný vztah pro teplo  $Q_1$  získáme z relací (3.67), (3.70) a (3.71).

$$Q_1 \approx c\rho_o \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{3/2} \frac{T_o \max}{2} \sum_{n=1}^4 \frac{a_n}{n} (\gamma^n + \eta_h^n), \quad \gamma = \sqrt{\beta} L < 1,7; \quad \eta_h = \sqrt{\beta} z_h < 1,7 \quad (3.72)$$

$$Q_1 \approx c\rho_o \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{3/2} \frac{T_o \max}{2} (2 + \ln \gamma + \ln \eta_h^n), \quad \gamma > 1,7; \quad \eta_h > 1,7 \quad (3.73)$$

$$Q_1 \approx c\rho_o \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{3/2} \frac{T_o \max}{2} \left( \sum_{n=1}^4 \frac{a_n}{n} \gamma^n + 1 + \ln \eta_h^n \right), \quad \gamma < 1,7; \quad \eta_h > 1,7. \quad (3.74)$$

Index  $h$  v (3.72) až (3.74) u  $\eta_h, z_h$  označuje „hraniční hodnotu“, kterou bude definovat relace (3.89). Poslední případ nastává často v praktických aplikacích.

Vypočteme nyní množství tepla  $Q_2$ , které přísluší teplotnímu průběhu  $T_2(z_o)$  – viz (3.37) ve válci o poloměru  $x_m$  a výšce  $L+z_h$ . Vyjdeme ze vztahu (3.54) pro  $T_2(z_o, x_o)$  a pro  $Q_2$  lze psát

$$\begin{aligned} Q_2 &= c\rho_o \Delta T \int_0^{L+z_h} \int_0^{x_m} 2\pi x_o e^{-\kappa x_o^2} \left(1 - \sqrt{\pi} \omega e^{+\omega^2} \operatorname{erfc} \omega\right) dx_o dz_o = \\ &= c\rho_o \Delta T \frac{\pi}{\kappa^{3/2}} \left(1 - e^{-\kappa x_m^2}\right) \int_0^{\sqrt{\kappa}(L+z_h)} \left(1 - \sqrt{\pi} \omega e^{+\omega^2} \operatorname{erfc} \omega\right) dz_o, \quad \omega = \sqrt{\kappa} z_o. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Proměnná  $z_o$  je orientována od povrchu směrem k ohnisku.

Výpočet integrálu ve vztahu (3.75) uvedeme podrobněji. Použijeme metody per partes

$$\int_{a_1}^{a_2} \omega e^{+\omega^2} \operatorname{erfc} \omega d\omega = \frac{1}{2} e^{+\omega^2} \operatorname{erfc} \omega \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a_1}^{a_2} d\omega, \quad u' = \omega e^{+\omega^2}; \quad v = \operatorname{erfc} \omega; \quad u = \frac{1}{2} e^{+\omega^2} \Big|_{a_1}^{a_2} \quad (3.76)$$

Dosadíme-li vztah (3.76) do vztahu (3.75) obdržíme

$$Q_2 = c\rho_o \Delta T \left(\frac{\pi}{\kappa}\right)^{3/2} \frac{1}{2} \left[ 1 - e^{+\kappa(L+z_h)^2} \operatorname{erfc} \sqrt{\kappa}(L+z_h) \right] \left(1 - e^{-\kappa x_m^2}\right). \quad (3.77)$$

Zjednodušíme vztah (3.77). Pro odval, který je neomezený v horizontálním směru, platí  $x_m \rightarrow \infty$ . Použijeme-li dále asymptotický rozvoj – viz (2.10), lze psát

$$e^{+\kappa(L+z_h)^2} \operatorname{erfc} \sqrt{\kappa}(L+z_h) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa}(L+z_h)}, \quad \sqrt{\kappa}(L+z_h) \gg 1. \quad (3.78)$$

Platí-li také

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\kappa}(L+z_h)} \ll 1, \quad (3.79)$$

obdržíme přibližný, jednoduchý vztah pro  $Q_2$

$$Q_2 \approx \frac{1}{2} c \rho_o \Delta T \left( \frac{\pi}{\kappa} \right)^{3/2} \quad (3.80)$$

Výsledné množství tepla  $Q$  v odvalu bude dáno, s ohledem na vztah (3.38), rozdílem

$$Q = Q_1 - Q_2, \quad (3.81)$$

kde za  $Q_1$  a  $Q_2$  dosadíme z relací (3.72) až (3.74) a (3.80).

### 3.6 Odhad tepla odvedeného ovzduším

Abychom mohli posoudit správnost některých postupů a hodnot vypočtených parametrů, porovnáme množství tepla  $Q_2$ , které odpovídá vlivu okrajové podmínky, s tepelným tokem z povrchu odvalu u příslušného ohniska a s odpovídajícím množstvím takto odvedeného tepla  $Q_\Sigma$  do ovzduší během doby existence ohniska  $t_{ex}$ . Z terénních měření lze určit teplotní gradient u povrchu ve vertikální ose ohniska  $\partial T_{\Sigma \max} / \partial z_o$ , tj. v místě s maximální povrchovou teplotou, podle (3.55) a (3.57) přibližně platí

$$\frac{\partial T_\Sigma(x_o)}{\partial z_o} \approx \frac{\partial T_{\Sigma \max}}{\partial z_o} e^{-\beta x_o^2}, \quad (3.82)$$

kde  $x_o$  je vzdálenost od vertikální osy procházející středem ohniska (tj.  $x_o = r$ ). Pro výpočet množství tepla, které přejde z povrchu odvalu do ovzduší je nutná znalost střední hodnoty gradientu, tj.  $\overline{\partial T_{\Sigma \max} / \partial z_o}$  během celé doby působení ohniska. Pro náš odhad předpokládáme, že během celé doby  $t_{ex}$  působení ohniska je  $q_o = konst.$ , tj. mohutnost tepelných zřídél se s časem nemění. Hodnota tepelného gradientu se mění s časem od nuly do  $\partial T_{\Sigma \max} / \partial z_o$  a v prvé aproximaci položíme

$$\overline{\frac{\partial T_{\Sigma \max}}{\partial z_o}} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial T_{\Sigma \max}}{\partial z_o}. \quad (3.83)$$

Pro množství tepla  $Q_\Sigma$ , které je odvedeno za dobu  $t_{ex}$  z celého povrchu části odvalu, který přísluší danému ohnisku s ohledem na vztahy (3.82) a (3.83), platí

$$Q_\Sigma \approx \lambda t_{ex} \frac{1}{2} \frac{\partial T_{\Sigma \max}}{\partial z_o} 2\pi \int_0^\infty r e^{-\beta r^2} dr = \frac{\lambda \pi t_{ex}}{\beta} \frac{1}{2} \frac{\partial T_{\Sigma \max}}{\partial z_o}. \quad (3.84)$$

Hodnota  $Q_\Sigma$  ze vztahu (3.84) musí korespondovat s hodnotou  $Q_2$  podle vztahu (3.77) resp. (3.80), tzn., že tato tepla musí být srovnatelná

$$Q_2 \sim Q_\Sigma. \quad (3.85)$$

### 3.7 Odhad doby existence ohniska záparu

V kap. 3.5 jsme za předpokladu stacionarity teplotního pole odvalu provedli odhad množství tepla  $Q$  v odvalu. Podle (3.81) je  $Q = Q_1 - Q_2$ , kde hodnota  $Q_2$  zahrnuje vliv okrajové podmínky na povrchu odvalu. V důsledku této okrajové podmínky bylo teplo  $Q_2$  – viz (3.77), (3.80) odvedeno za dobu činnosti  $t_{ex}$  do ovzduší a musí platit vztah (3.85). Doby existence ohniska odhadneme z hodnot tepla  $Q_1$  a tepelného výkonu ohniska  $P$ . Nejdříve je však nutné podrobněji analyzovat množství tepla  $Q_1$ , které odpovídá stacionárnímu teplotnímu poli. Obrátíme proto pozornost k průběhu teploty v dolním poloprostoru a k teplu  $Q_1$  pro velké hodnoty  $z_h$ , tj. pro  $\eta_h \sqrt{\beta} z_h \gg 2$ . Podle vztahů (3.33), (3.67), (3.73), (3.74) platí

$$T(z_h) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{T_o \max}{\eta_h}; \quad Q_1 = c \rho \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^{3/2} \frac{T_o \max}{2} \left( \int_0^\gamma \frac{\text{erf } \eta}{\eta} d\eta + \int_0^{1.7} \frac{\text{erf } \eta}{\eta} d\eta + \int_{1.7}^{\eta_h} \frac{d\eta}{\eta} \right) \quad (3.86)$$

Ve vztahu (3.86) pro  $T(z_h)$  je možno pro  $\eta_h \gg 1$  zanedbat vliv okrajové podmínky. Uvážíme-li vztahy (3.73), (3.74) lze pro  $Q_1$  psát

$$Q_1 = c\rho \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{3/2} \frac{T_{o \max}}{2} (A_i + \ln \eta_h), \quad i = 1, 2 \quad (3.87)$$

$$A_1 = 2 + \ln \gamma \dots \quad \gamma > 1,7; \quad \eta_h > 1,7; \quad \gamma = \sqrt{\beta L}, \quad (3.88)$$

$$A_2 = \sum_{n=1}^4 \frac{a_n}{n} \gamma^n + 1 \dots \quad \gamma < 1,7; \quad \eta_h < 1,7.$$

Ze vztahu (3.87) je zřejmé, že platí  $Q_1(\eta_h \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ . To znamená, že množství tepla v neomezeném prostoru ve stacionárním teplotním poli je neomezené. Teplotní pole se stává stacionárním za dobu  $t \rightarrow \infty$ . Z toho plyne, že tepelná zřídla působí během doby  $t \rightarrow \infty$ . V reálných případech se však u odvalů vždy jedná o nestacionární stavy, protože tepelná zřídla působí během konečné doby  $t_{ex}$ . V těchto nestacionárních polích klesá teplota  $T(z_h)$  se vzrůstem  $z_h$  rychleji, než udává stacionární případ, pro který platí  $T(z_h) \approx 1/z_h$  – viz (3.86) pro velké hodnoty  $z_h$ . Proto i množství tepla  $Q$  v nestacionárním teplotním poli je konečné.

Chceme-li tedy odhadnout množství tepla  $Q_1$  ve stacionárním teplotním poli, které by bylo srovnatelné s reálným případem nestacionárního pole, musíme omezit vzdálenost  $z_h$  od středu ohniska do dolního poloprostoru a na základě úmluvy položíme

$$\eta_h = \sqrt{\beta} z_h \approx 2. \quad (3.89)$$

S omezením  $\eta_h$  podle vztahu (3.89) budeme tedy provádět výpočty  $Q_1$  ve stacionárním teplotním poli.

Dále je nutno si povšimnout vztahu (3.59), který popisuje teplotní pole  $T(z_o, x_o)$  s ohledem na závislost této teploty na vzdálenosti  $x_o$  od vertikální osy, procházející středem ohniska. Tento vztah lze formálně přepsat

$$T(z_o, x_o) = T(z_o, x_o = 0) e^{-\beta x_o^2}. \quad (3.90)$$

Odvození závislosti  $T(x_o)$  bylo provedeno v kap. 3.3 a při tomto odvození bylo použito zjednodušení, které využívalo střední hodnotu  $\bar{l}^2(\rho)$  – viz (3.51). Proto i výsledný výraz (3.90) vzhledem k proměnné  $x_o$  je přibližný. V kapitolách, které se budou zabývat teoretickou analýzou a praktickými příklady výpočtu nestacionárního teplotního pole ukážeme, že teplotní závislost  $T(x_o)$  z (3.90) se vzrůstajícím  $x_o$  klesá pro větší hodnoty  $x_o$  ostřeji, nežli skutečné teplotní pole a uvedenou aproximaci lze přibližně použít pouze pro nepříliš velké hodnoty  $\sqrt{\beta} x_o$ , např.  $\sqrt{\beta} x_o \leq 0,5 \div 1$ . Touto problematikou se budeme zabývat v dalších pracích. Tam také ukážeme, že teplotní profily v horizontálním směru závisí ve skutečnosti také na hloubce  $z_o$  po povrchu. Omezené použití vztahu  $T(z_o, x_o)$  podle (3.90) resp. (3.59), vzhledem k velikosti  $\sqrt{\beta} x_o$ , rovněž omezuje provádění diagnostiky stacionárního teplotního pole, protože k určení parametru  $\sqrt{\beta}$  můžeme využít s vyhovující přesností pouze vrty, jejichž vzdálenost  $x_o$  od centrálního vrtu, jehož osa prochází středem ohniska, není příliš velká.

Při výpočtu  $Q_1$  jsme prováděli integraci vztahu (3.90) s příslušným objemovým elementem přes parametr  $x_o$  – viz (3.67), a proto i množství tepla v „horizontálním směru“ je omezené. Z výše uvedených skutečností tedy vyplývá, že závislost prezentovaná funkcí (3.90) s ohledem na  $x_o$  a podmínkou (3.89) pro  $z_h$  při výpočtu  $Q_1$  mají za následek, že takto stanovená hodnota tepla  $Q_1$  bude srovnatelná s hodnotou  $Q_1$ , která přísluší nestacionárnímu teplotnímu poli, kde budou v následujících publikacích provedeny příslušné numerické výpočty.

Na základě výše uvedených poznámek lze pro odhad doby činnosti ohniska psát:

$$t_{ex} \approx \frac{Q_1}{P} [s], \quad 1 \text{ rok} = 3,154 \cdot 10^7 \text{ s}, \quad (3.91)$$

kde pro tepelný výkon v ohnisku  $P$  platí vztah (3.61) a teplo  $Q_1$  udávají vztahy (3.73) a (3.74) pro  $\eta_h \approx 2$  – viz (3.89). Výpočet  $t_{ex}$  podle vztahu (3.91) předpokládá, že maximální hustota, resp. mohutnost tepelných zřidel  $q_o$  – viz (3.1), (3.61), je vlastně střední hodnotou  $q_o$  během celé doby působení ohniska záparu. Dále je nutno si uvědomit, že  $t_{ex}$  je vlastně odhad minimální doby činnosti ohniska, protože ohnisko samovznícení dosáhne v inkubační fázi kritické teploty a následně jiného charakteru záparových chemických reakcí. Poté dojde k prostorovému šíření samovzněcovacího procesu, až nabude plně sférického tvaru, který je popsán rovnicí (3.1) pro  $\alpha = \beta$  a teprve pak ho můžeme charakterizovat parametrem  $\beta$ .

### 3.8 Posouzení kvazistacionarity teplotního pole

Teplotní pole v odvalu může být nestacionární nebo kvazistacionární, tzn. že se může u dlouhodobých ohnisek záparu přibližovat idealizovanému stacionárnímu stavu, který nastane pro  $t \rightarrow \infty$ . V následné práci budou řešeny praktické příklady určování teplotních a tepelných charakteristik v odvalu, tj. jeho diagnostika a k těmto charakteristikám přísluší i posouzení, zdali je analyzované teplotní pole kvazistacionární nebo nestacionární. Toto hodnocení lze provést ze znalosti odhadu doby  $t_{ex}$  činnosti ohniska a ze znalosti teoretického řešení problematiky nestacionárního teplotního pole, které bude publikováno později. Abychom zachovali kontinuitu výkladu vzhledem k numerickým řešením v další práci, uvedeme již zde kritérium k posouzení nestacionarity teplotního pole. Pole je nestacionární v případě, že platí

$$\varphi(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4at\beta}} < 0,75 \Rightarrow \sqrt{at\beta} < 1,94; \quad t = t_{ex}. \quad (3.92)$$

### 3.9 Závěr

V této práci bylo provedeno přibližné analytické řešení stacionárního teplotního pole odvalu se záparem. Předpokládali jsme model ohniska záparu s „neostrou hranicí“, kdy rozložení tepelných zřidel je popsáno Gaussovou funkcí – viz (3.1) a ohnisko je sféricky symetrické, tj.  $\alpha = \beta$  ve vztahu (3.1). Po výpočtu průběhu teploty na základní vertikální ose, procházející středem ohniska, byl proveden přibližný výpočet průběhu teploty na vertikále ve vzdálenosti  $x_o$  od základní osy – tj. mimoosový případ a odvozenou funkci lze použít pro nepřilíš velké hodnoty  $\sqrt{\beta} x_o$ . V další části práce bylo do výpočtů zahrnuto respektování 3. okrajové podmínky na povrchu odvalu, které prezentuje ochlazování tohoto povrchu ovzduším.

Po výpočtu stacionárního teplotního pole byly odvozeny vztahy pro odhady tepelných charakteristik odvalu, tj. maximální mohutnosti tepelných zřidel  $q_o$ , tepelného výkonu ohniska  $P$ , množství tepla v odvalu  $Q$ , množství tepla, které je odvedeno z povrchu odvalu ovzduším  $Q_\Sigma$  resp.  $Q_2$  a konečně odhad doby působení ohniska  $t_{ex}$ .

Teorie odvozená v této části tvoří základ pro diagnostiku teplotního a tepelného pole odvalu za předpokladu stacionarity tohoto pole a sféricky symetrického ohniska. V druhém dílu práce ukážeme, že pomocí této diagnostiky lze ze znalosti povrchových teplot a teplot v krátkých vrtech na odvalu určit základní parametry, které charakterizují ohnisko záparu a příslušné teplotní pole. Mezi tyto parametry patří odhad hloubky  $L$  ohniska pod povrchem, maximální teplota v ohnisku, rozložení tepelných zřidel, které je charakterizováno parametrem  $\beta$  a dále již výše uvedené veličiny  $q_o$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $Q_\Sigma$ ,  $t_{ex}$ . Hloubka krátkých vrtů se předpokládá většinou do 5 m s možností doplnění údajů v minimálně jednom vrtu do hloubky 6 m až 8 m.

Teoretické základy pro diagnostiku byly vypracovány pro sféricky symetrické ohnisko a stacionární teplotní pole. V praxi tvar ohniska nemusí splňovat požadavky symetrie a teplotní pole jsou většinou nestacionární. U nestacionárního pole klesá teplota s rostoucí vzdáleností od ohniska rychleji než u stacionárního pole. Proto teplotní gradient u povrchu u nestacionárního pole je většinou menší v porovnání se stacionárním polem. V případě, že ohnisko je v nevelké hloubce, dojde poměrně brzy mezi povrchem a ohniskem k ustálenému stavu a rozdíl v teplotním profilu na vertikální ose procházející středem a povrchem u obou druhů teplotních polí není příliš velký. V reálném odvalu se mohou vyskytovat také anomálie v hodnotách koeficientů teplotní a tepelné vodivosti a teorie pracuje pouze se středními hodnotami

těchto veličin. Z těchto důvodů může teorie, předložená v této práci, dát podklady pro provedení prvé aproximace kvalifikovaných odhadů základních parametrů teplotního a tepelného pole a z nich budou vycházet postupy při diagnostice odvalu v následující práci. Další upřesnění odhadů umožní teprve teorie nestacionárního teplotního pole.

Vzhledem k tomu, co bylo řečeno o nehomogenitě odvalů v úvodu této práce znovu zdůrazňujeme, že se jedná pouze o odhady hodnot výše uvedených parametrů.

*Tato práce vznikla v rámci řešení grantového projektu a s finanční podporou Grantové agentury ČR reg. č. 105/03/0658 „Teoretické základy řešení některých problémů sanace a likvidace odvalů se záparem a jejich využití v praxi“.*

## Literatura

- [1] Tichonov A.N., Samarskij A.A.: Rovnice matematické fyziky. Praha, ČSAV, 1955, 765 s.
- [2] Rektorys K. et al.: Přehled užití matematiky. Praha, SNTL, 1968, 1136 s.

## Summary

In this work an approximate analytical solution of the stationary temperature field of dump with spontaneous fire was carried out. We assumed a model of the spontaneous fire focus with a “fuzzy boundary” when the distribution of heat sources can be described by Gauss function – see (3.1) and the centre is spherically symmetrical. Having calculated the temperature profile on the main vertical axis running through centre point of spontaneous fire focus, an approximate calculation of the temperature profile on the vertical line in a distance  $x_0$  from the main axis – i.e. an extra-axial case, was performed. In the further part of the work the calculations respected the third boundary condition on dump surface, which presents the surface cooling by the air.

The stationary temperature field calculation was followed by the derivation of relations for assessing of the dump heat characteristics, i.e. the maximum capacity of heat sources, the heat output of the spontaneous fire focus, the heat amount within the dump, the heat amount removed from dump surface by air and the assessment of focus activity time.

Such diagnostic theoretical fundamentals were elaborated for a spherically symmetrical focus and a stationary temperature field. In reality, however, the shape of focus usually does not meet the requirement of symmetry and the temperature fields are mostly non-stationary. In non-stationary temperature fields, the temperature decreases with the distance from the focus faster than in stationary fields. Therefore the temperature gradient at non-stationary field surface is mostly smaller in comparison with the stationary field. If the focus is not very deep, a stationary state is established between the surface and spontaneous fire focus relatively soon and the difference of temperatures on the vertical axis through the focus and the surface is not very important for both types of temperature fields. In real dumps, anomalies of the temperature and thermal conductivity coefficients values may occur and the theory works with the mean values of these quantities. These are the reasons why the theory presented in this work may serve as fundamentals for performing the first approximation of qualified estimations of basic parameters of the temperature and heat fields and these will represent the basis for procedures of the dump diagnostics included in the following work. A theory of non-stationary temperature field will enable to specify the estimations more precisely.

**Recenzenti:** Prof. RNDr. Zdeněk Dostál, CSc., VŠB-TU Ostrava  
Ing. Jaroslav Němec, DrSc., Energie Kladno

