

Michal MUDRA*

POSOUZENÍ PŘESNOSTI PŘECHODNÉHO STANOVISKA URČENÉHO Z MINIMÁLNÍHO POČTU DANÝCH BODŮ A MĚŘENÝCH VELIČIN

APPRAISAL OF ACCURACY OF FREE POSITRON WITH MINIMUM OF GIVEN POINTS AND
OF MEASURED QUANTITIES

Abstrakt

Sestavení chybového modelu geodetické úlohy pro posouzení přesnosti přechodného stanoviska při minimu daných bodů a měřených veličin a při přeúčtení úlohy jednou měřenou veličinou. Řešení přeúčtené úlohy pseudoinverzní maticí vypočtenou SVD-rozkladem.

Abstract

By the article a compilation of error model of geodetic problem for appraisal of accuracy of a free position with minimum of given points and of measured quantities and with overdetermining of problem by means of a single measured quantity is discussed. A solution of overdetermined problem by pseudoinverse matrix calculated by SVD reduction is given.

Key words: free position, error model, SVD reduction.

Úvod

V geodetické praxi se mohou vyskytnout případy, kdy jsou souřadnice přechodného stanoviska určovány z minimálního počtu daných, tedy pouze ze dvou bodů o známých souřadnicích. K vyřešení úlohy pak postačuje změření úhlu mezi danými body a délky k jednomu z nich (literatura tuto úlohu někdy označuje jako rajón z určovaného bodu). Při úvaze o přesnosti takto určeného přechodného stanoviska je možné uplatnit model geodetické úlohy (dále jen MGÚ) popsany např. v [1]. Přesnost libovolné geodetické úlohy závisí na:

- Přesnosti měření (v MGÚ představuje matice *M_i).
- Použití metodě (v MGÚ představuje matice D).
- Rozložení bodů určovaných (v MGÚ představuje matice A_1).
- Rozložení bodů daných (v MGÚ představuje matice A_2).
- Přesnosti daných bodů (v MGÚ představuje matice 2M_x).

Označení je shodné s [1].

Význam uvedených matic je následující:

- Diagonální prvky matice *M_i tvoří čtverce směrodatných odchylek měřených veličin.
- Prvky matice D tvoří parciální derivace zprostředkujících vztahů podle měřených veličin (matice plánu).
- Prvky matice A_1 tvoří parciální derivace zprostředkujících vztahů podle určovaných souřadnic.
- Prvky matice A_2 tvoří parciální derivace zprostředkujících vztahů podle souřadnic daných bodů.

Diagonální prvky matice 2M_x tvoří čtverce směrodatných odchylek polohových, pokud je u daných bodů známe.

Výsledná přesnost určovaného bodu je potom dána kovarianční maticí:

* Ing., Ing. Jiří OLŠAR-ZEMĚMĚŘICTVÍ JESENÍK, Husova 191, 790 01 Jeseník, e-mail: zemjes.dm@iol.cz

$$M_p = B.D.^*M_t.D^T.B^T + B.A_2.^2M_x.A_2^T.B^T, \quad (1)$$

kde

$$B = A_I^{-1}. \quad (2)$$

V mnoha případech lze předpokládat, že oba dané body budou přístupné – bude tedy možné měřit délku k oběma daným bodům. Úloha potom bude jednou měřenou veličinou přeúčena. Cílem rozboru je zjistit, do jaké míry je možné tímto minimálním přeúčením zlepšit řešení celé úlohy.

Sestavení úlohy

Byla sestavena teoretická úloha, ve které je přechodné stanovisko určováno z různých kombinací dvou ze čtyř daných bodů. Dané body byly voleny tak, aby rozdíly mezi jednotlivými kombinacemi byly pokud možno maximální (viz obr. 1). Každá varianta byla řešena pro minimální i nadbytečný počet měřených veličin.

V úloze byly dané body považovány za bezchybné ($\sigma_p = 0$), čímž se vztah (1) upraví:

$$M_p = B.D.^*M_t.D^T.B^T. \quad (3)$$

Přesnost měření byla volena s přihlédnutím k podmínkám dosažitelným při podrobném měření: ($\sigma_d = 10$ mm, $\sigma_\psi = 2,5$ mgon).

Přechodné stanovisko bylo určeno kombinací dvou z těchto čtyř daných bodů:

Tabulka 1: Souřadnice daných bodů

BOD	X	Y
A	5000,00 m	1200,00 m
B	5000,00 m	1000,00 m
C	5020,00 m	1000,00 m
D	5110,00 m	1110,00 m

Vypočtený bod P má ve všech variantách souřadnice:

Tabulka 2: Souřadnice určovaného bodu

BOD	X	Y
P	5010,00 m	1100,00 m

Princip výpočtu přesnosti bodu P bude ukázán v následujících kapitolách na variantě 1 (viz obr. 1).

Výpočet přesnosti úlohy s minimálním počtem měřených veličin - varianta 1a

Měřeno:

Tabulka 3: Měřené veličiny

Veličina	Velikost	σ
d_{PA}	100,50 m	10 mm
ψ_{PA}	106,3451 gon	2,5 mgon
ψ_{PB}	293,6549 gon	2,5 mgon

Volba zprostředkujících vztahů:

Tabulka 4: Zprostředkující vztahy

$$\begin{array}{l} *d_{PA} = d_{PA} = S_1 = \sqrt{\Delta Y_{PA}^2 + \Delta X_{PA}^2} \\ * \psi_{PB} - * \psi_{PA} = \omega = S_2 = \arctg \frac{\Delta Y_{PC}}{\Delta X_{PC}} - \arctg \frac{\Delta Y_{PA}}{\Delta X_{PA}} \end{array}$$

Sestavení matic D , A_I , M_t :

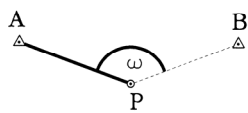
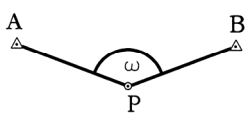
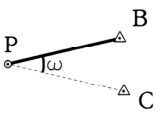
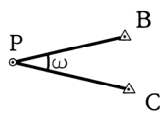
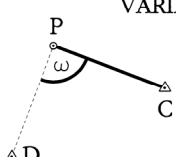
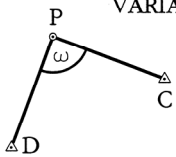
$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial d_{PA}} & \frac{\partial S_1}{\partial \psi_{PA}} & \frac{\partial S_1}{\partial \psi_{PB}} \\ \frac{\partial S_2}{\partial d_{PA}} & \frac{\partial S_2}{\partial \psi_{PA}} & \frac{\partial S_2}{\partial \psi_{PB}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial X_P} & \frac{\partial S_1}{\partial Y_P} \\ \frac{\partial S_2}{\partial X_P} & \frac{\partial S_2}{\partial Y_P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta Y_{PA}}{d_{PA}} & -\frac{\Delta X_{PA}}{d_{PA}} \\ \left(\frac{\Delta Y_{PA}}{d_{PA}^2} - \frac{\Delta Y_{PB}}{d_{PB}^2}\right) * \rho^{cc} & \left(\frac{\Delta X_{PB}}{d_{PB}^2} - \frac{\Delta X_{PA}}{d_{PA}^2}\right) * \rho^{cc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0995 & -0,9950 \\ 12,606 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_t = \text{diag.}(\sigma_d^2, \sigma_\psi^2, \sigma_\psi^2) = \text{diag.}(100,625,625)$$

Po dosazení do vztahů (2) a (3) bude kovarianční matice:

$$M_p = \begin{pmatrix} 7,866 & 0,7866 \\ 0,7866 & 101,08 \end{pmatrix}$$

Počet měřených veličin minimální	S jednou nadbytečnou veličinou
VARIANTA 1a 	VARIANTA 1b 
VARIANTA 2a 	VARIANTA 2b 
VARIANTA 3a 	VARIANTA 3b 

Obr. 1: Varianty výpočtu

Výpočet přesnosti úlohy s jednou nadbytečnou veličinou - varianta 1b

Měřeno:

Tabulka 5: Měřené veličiny

d_{PA}	100,50 m	10 mm
d_{PB}	100,50 m	10 mm
ψ_{PA}	106,3451 gon	2,5 mgon
ψ_{PB}	293,6549 gon	2,5 mgon

Volba zprostředkujících vztahů:

Tabulka 6: Zprostředkující vztahy

$*d_{PA} = d_{PA}$	$= S_1 =$	$\sqrt{\Delta Y_{PA}^2 + \Delta X_{PA}^2}$
$*d_{PC} = d_{PB}$	$= S_2 =$	$\sqrt{\Delta Y_{PC}^2 + \Delta X_{PC}^2}$
$*\psi_{PB} - *\psi_{PA} = \omega$	$= S_3 =$	$\arctg \frac{\Delta Y_{PC}}{\Delta X_{PC}} - \arctg \frac{\Delta Y_{PA}}{\Delta X_{PA}}$

Sestavení matic D , A_I , M_I :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial d_{PA}} & \frac{\partial S_1}{\partial d_{PC}} & \frac{\partial S_1}{\partial \psi_{PA}} & \frac{\partial S_1}{\partial \psi_{PC}} \\ \frac{\partial S_2}{\partial d_{PA}} & \frac{\partial S_2}{\partial d_{PC}} & \frac{\partial S_2}{\partial \psi_{PA}} & \frac{\partial S_2}{\partial \psi_{PC}} \\ \frac{\partial S_3}{\partial d_{PA}} & \frac{\partial S_3}{\partial d_{PC}} & \frac{\partial S_3}{\partial \psi_{PA}} & \frac{\partial S_3}{\partial \psi_{PC}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

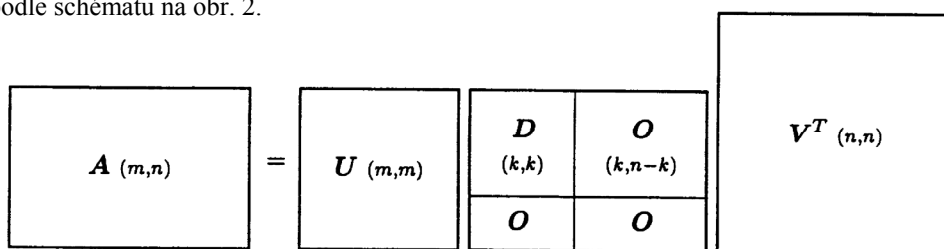
$$A_I = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial X_P} & \frac{\partial S_1}{\partial Y_P} \\ \frac{\partial S_2}{\partial X_P} & \frac{\partial S_2}{\partial Y_P} \\ \frac{\partial S_3}{\partial X_P} & \frac{\partial S_3}{\partial Y_P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta X_{PA}}{d_{PA}} & -\frac{\Delta Y_{PA}}{d_{PA}} \\ -\frac{\Delta X_{PC}}{d_{PC}} & -\frac{\Delta Y_{PC}}{d_{PC}} \\ \left(\frac{\Delta Y_{PA}}{d_{PA}^2} - \frac{\Delta Y_{PB}}{d_{PB}^2}\right) * \rho^{cc} & \left(\frac{\Delta X_{PB}}{d_{PB}^2} - \frac{\Delta X_{PA}}{d_{PA}^2}\right) * \rho^{cc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0995 & -0,9950 \\ 0,0995 & 0,9950 \\ 12,606 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$M_I = \text{diag}(\sigma_d^2, \sigma_d^2, \sigma_\psi^2, \sigma_\psi^2) = \text{diag}.(100,100,625,625)$$

Výpočet pseudoinverzní matice SVD-rozkladem

Jelikož je matice A_I singulární, nelze ji dosadit do vztahu (2) a úloha se bude řešit např. pomocí matice pseudoinverzní.

Nejprve se provede SVD-rozklad (z anglického *Singular Value Dekomposition* – singulární rozklad matice) podle schématu na obr. 2.



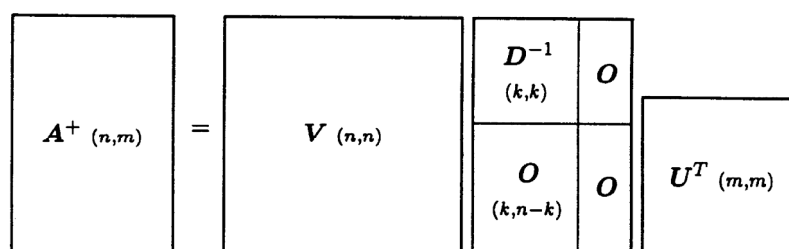
Obr. 2: Schéma singulárního rozkladu matice

Matice D na obr. 2 (pozn.: matice D (k,k) na obr. 2 nemá žádnou souvislost s maticí plánu D) je diagonální matice obsahující singulární čísla matice A , U a V jsou ortogonální, popř. unitární matice, tj. platí $U \cdot U^T = I$ a $V \cdot V^T = I$, kde I je jednotková matice odpovídajících rozměrů, D je diagonální matice s reálnými nezápornými čísly na diagonále, sestupně uspořádanými a platí $A = U \cdot D \cdot V^T$.

Matice A_I (4) lze tedy zapsat:

$$A_I = \begin{pmatrix} -0,00789 & 0,70711 & -0,70706 \\ 0,007893 & -0,70711 & -0,70706 \\ -0,99994 & 0 & 0,011162 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 12,607 & 0 \\ 0 & 1,4072 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matice pseudoinverzní k matici A_I se vypočte z SVD-rozkladu podle schématu na obr. 3.



Obr. 3: Schéma výpočtu pseudoinverzní matice k matici A_1

$$A^+ = B = \begin{pmatrix} 0,00063 & 0,00063 & 0,079316 \\ 0,50249 & 0,50249 & 0 \end{pmatrix}.$$

O správném výpočtu pseudoinverzní matice se lze jednoduše přesvědčit zkouškou:

$$B * A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podrobně je SVD – rozklad popsán např. v [2].

Po dosazení do vztahu (3) bude kovarianční matice:

$$M_P = \begin{pmatrix} 7,8639 & 0 \\ 0 & 50,5 \end{pmatrix}.$$

Problém špatně podmíněných matic

Při dekompozici singulární matice A_1 je třeba počítat s tím, že úloha bude v některých případech velmi špatně řešitelná, nebo nebude řešitelná vůbec. To může nastat tehdy, je-li matice A_1 špatně podmíněna. Možnost či nemožnost dekompozice špatně podmíněných matic je problém spíše oboru teorie matic a nebude zde řešen. Na tomto místě je dobré jen poukázat na fakt, že dekompozice je do jisté míry závislá na čísle podmíněnosti matice, které je vypočteno ze singulárních čísel, které tvoří matici D (jsou-li singulární čísla $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n$, je číslo podmíněnosti $\text{Cond}(A_1) = \sigma_1/\sigma_n$) čím vyšší je číslo podmíněnosti, tím je matice lépe podmíněna.

Úloha se stane špatně řešitelnou např. tehdy, je-li rozložení daných k určovanému bodu takové, že úhel ω u určovaného bodu bude násobkem 100 gon a strany PA , BP jsou orientovány rovnoběžně se souřadnými osami. Dvě takové varianty včetně obecného zápisu matice A_1 je znázorněno na obr. 4a, 4b.



Obr. 4: Varianty špatně řešitelné úlohy

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ k & k \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{Cond}(A_1) = 8,54$$

$$\text{Cond}(A_1) = 4,24$$

$$k \neq 0, k \in \mathfrak{R},$$

$$(d_{PA} = d_{PB}),$$

$$\omega = n * 100^g$$

Při sestavování teoretické úlohy bylo snahou vyhnout se těmto extrémním rozložením bodů a úloha byla volena pokud možno obecně. Sice ve variantě 3b (obr. 1) je úhel $\omega = 100$ gon, ale obrazec je situován obecně k souřadným osám, čímž se číslo podmíněnosti matice $\text{Cond}(A_1)$ zvýší z 8,5 na 9,4. Obdobně u varianty 1b (obr. 1) se natočením stran a změnou úhlu ω číslo podmíněnosti změní ze 4,2 na 9,0! U varianty 2b (obr. 1) je číslo podmíněnosti 13,4.

Výpočet přesnosti přechodem na úlohu protínání z délek

Měřeno:

Tabulka 7: Měřené veličiny

d_{PA}	100,50 m	10 mm
d_{PC}	100,50 m	10 mm
ψ_{PA}	106,3451 gon	2,5 mgon
ψ_{PB}	293,6549 gon	2,5 mgon

Z měřených hodnot se k rozboru přesnosti použijí pouze délky.

Volba zprostředkujících vztahů:

Tabulka 8: Zprostředkující vztahy

$$\begin{aligned} *d_{PA} = d_{PA} = S_1 &= \sqrt{\Delta Y_{PA}^2 + \Delta X_{PA}^2} \\ *d_{PC} = d_{PC} = S_2 &= \sqrt{\Delta Y_{PC}^2 + \Delta X_{PC}^2} \end{aligned}$$

Sestavení matic D , A_1 , M_t :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial d_{PA}} & \frac{\partial S_1}{\partial d_{PC}} \\ \frac{\partial S_2}{\partial d_{PA}} & \frac{\partial S_2}{\partial d_{PC}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial X_P} & \frac{\partial S_1}{\partial Y_P} \\ \frac{\partial S_2}{\partial X_P} & \frac{\partial S_2}{\partial Y_P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta X_{PA}}{d_{PA}} & -\frac{\Delta Y_{PA}}{d_{PA}} \\ -\frac{\Delta X_{PC}}{d_{PC}} & -\frac{\Delta Y_{PC}}{d_{PC}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0995 & -0,9950 \\ 0,0995 & 0,9950 \end{pmatrix}$$

$$M_t = \begin{pmatrix} \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & \sigma_d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Po dosazení do vztahu (3) bude kovarianční matice:

$$M_p = \begin{pmatrix} 5050,125 & 0 \\ 0 & 50,5013 \end{pmatrix}.$$

Pro varianty 2 a 3 (obr. 1) byly naměřeny hodnoty:

Varianta 2

Tabulka 9: Nutný počet měření

d_{PB}	100,50 m	10 mm
ψ_{PB}	293,6549 gon	2,5 mgon
ψ_{PC}	306,3451 gon	2,5 mgon

Tabulka 10: S jednou nadbytečnou veličinou

d_{PB}	100,50 m	10 mm
d_{PC}	100,50 m	10 mm
ψ_{PB}	293,6549 gon	2,5 mgon
ψ_{PC}	306,3451 gon	2,5 mgon

Tabulka 11: Protínání z délek

d_{PB}	100,50 m	10 mm
d_{PC}	100,50 m	10 mm

Varianta 3

Tabulka 12: Nutný počet měření

d_{PC}	100,50 m	10 mm
ψ_{PC}	6,3451 gon	2,5 mgon
ψ_{PD}	106,3451 gon	2,5 mgon

Tabulka 13: S jednou nadbytečnou veličinou

d_{PC}	100,50 m	10 mm
d_{PD}	100,50 m	10 mm
ψ_{PC}	6,3451 gon	2,5 mgon
ψ_{PD}	106,3451 gon	2,5 mgon

Tabulka 14: Protínání z délek

d_{PC}	100,50 m	10 mm
d_{PD}	100,50 m	10 mm

Porovnání výsledků

Přesnost úlohy je charakterizována:

- Kovarianční matici.
- Elipsou chyb (poloosy a, b , úhel stočení hlavní poloosy a).

Úhel stočení elipsy chyb se vypočte:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2 * \operatorname{cov}_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}.$$

Při výpočtu je nutno uvažovat kvadrant obdobně jako při výpočtu směrníku. Úhel 2ω nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, 400 \text{ gon} \rangle$. Úhel ω tedy může nabývat hodnot $\langle 0, 200 \text{ gon} \rangle$. Úhel stočení je vlastně směrník hlavní poloosy elipsy chyb, tedy úhel od osy X k poloose a [1].

Hodnoty poloos se vypočtou:

$$a^2 = \sigma_x^2 * \cos^2 \omega + \operatorname{cov}_{xy} * \sin 2\omega + \sigma_y^2 * \sin^2 \omega,$$

$$b^2 = \sigma_x^2 * \sin^2 \omega - \operatorname{cov}_{xy} * \sin 2\omega + \sigma_y^2 * \cos^2 \omega.$$

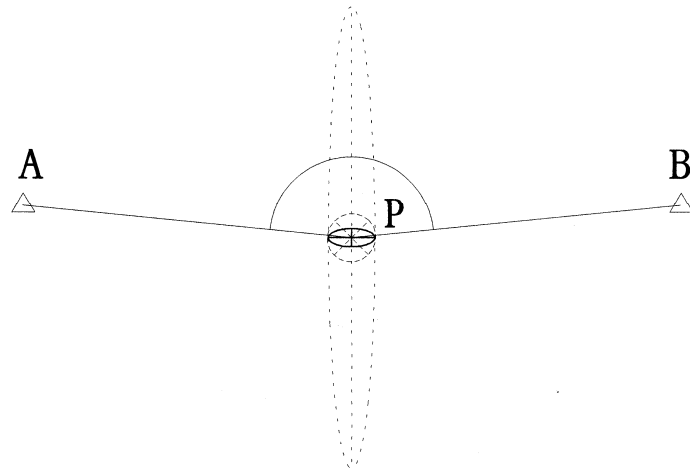
- Směrodatnou odchylkou polohovou a směrodatnými odchylkami v osách Y, X .

Všechny tyto charakteristiky přesnosti pro jednotlivé uvažované varianty rozložení daných bodů jsou přehledně znázorněny na obr. 5-7 a v tab. 15-17. Pozn.: Obrázky 5-7 jsou zmenšeny, měřítko na obrázcích uvedené tedy neplatí.

Tabulka 15: Varianta 1

	Nutný počet veličin (úhel, délka)		Úloha přeúčtená (úhel, 2 délky)		Nutný počet veličin (2 délky)
M_p	$\begin{pmatrix} 7,87 & 0,79 \\ 0,79 & 101,08 \end{pmatrix}$	M_p	$\begin{pmatrix} 7,86 & 0 \\ 0 & 50,5 \end{pmatrix}$	M_p	$\begin{pmatrix} 5050,13 & 0 \\ 0 & 50,50 \end{pmatrix}$
ω	50,32 gon	ω	0 gon	ω	0 gon
a	7,47 mm	a	2,80 mm	a	71,06 mm
b	7,30 mm	b	7,11 mm	b	7,11 mm
σ_x	2,81 mm	σ_x	2,80 mm	σ_x	71,06 mm
σ_y	10,05 mm	σ_y	7,11 mm	σ_y	7,11 mm
σ_{xy}	10,44 mm	σ_{xy}	7,64 mm	σ_{xy}	71,11 mm

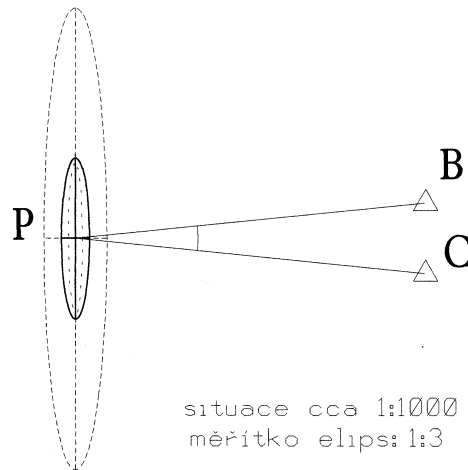
- nutný počet měření
- přeúčtená úloha
- ... protínání z délek



situace cca 1:1000
měřítko elips: 1:1

Obr. 5: Varianta 1

- nutný počet měření
- přeúčtená úloha
- ... protínání z délek



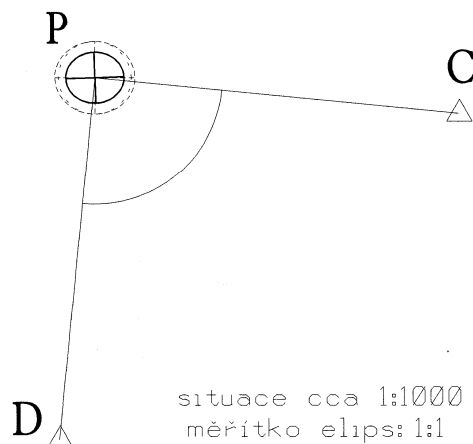
situace cca 1:1000
měřítko elips: 1:3

Obr. 6: Varianta 2

Tabulka 16: Varianta 2

	Nutný počet veličin (úhel, délka)		Úloha přeúčtená (úhel, 2 délky)		Nutný počet veličin (2 délky)
M_p	$\begin{pmatrix} 88760,26 & -7866,00 \\ -7866,00 & 786,60 \end{pmatrix}$	M_p	$\begin{pmatrix} 4616,54 & 0 \\ 0 & 171,465 \end{pmatrix}$	M_p	$\begin{pmatrix} 5050,13 & 0 \\ 0 & 50,50 \end{pmatrix}$
ω	199,89 gon	ω	0 gon	ω	0 gon
a	297,93 mm	a	67,95 mm	a	71,06 mm
b	27,56 mm	b	13,09 mm	b	7,11 mm
σ_x	297,93 mm	σ_x	67,95 mm	σ_x	71,06 mm
σ_y	28,05 mm	σ_y	13,09 mm	σ_y	7,11 mm
σ_{xy}	299,24 mm	σ_{xy}	69,20 mm	σ_{xy}	71,42 mm

- nutný počet měření
- přeurená úloha
- ... protínání z délek



Obr. 7: Varianta 3

Tabulka 17: Varianta 3

	Nutný počet veličin (úhel, délka)		Úloha přeurená (úhel, 2 délky)		Nutný počet veličin (2 délky)
M_p	$\begin{pmatrix} 111,04 & 0 \\ 0 & 120,11 \end{pmatrix}$	M_p	$\begin{pmatrix} 49,21 & -41,55 \\ -41,55 & 66,00 \end{pmatrix}$	M_p	$\begin{pmatrix} 100,00 & 0 \\ 0 & 100,00 \end{pmatrix}$
ω	0 gon	ω	199,06 gon	ω	0 gon
A	10,54 mm	a	7,10 mm	a	10 mm
b	10,96 mm	b	8,05 mm	b	10 mm
σ_x	10,54 mm	σ_x	7,01 mm	σ_x	10,00 mm
σ_y	10,96 mm	σ_y	8,12 mm	σ_y	10,00 mm
σ_{xy}	15,20 mm	σ_{xy}	10,73 mm	σ_{xy}	14,14 mm

Závěr

Nutný počet měření pro určení přechodného stanoviska z minimálního počtu daných bodů a měřených veličin může být dvojnásobný:

- a) měřeny byly směry na dva dané body a délka k jednomu z nich,
- b) měřeny byly délky k oběma daným bodům (protínání z délek, úloha může mít obecně 2 řešení).

V článku bylo provedeno porovnání obou těchto variant s variantou, kdy byla změřena jedna veličina navíc, tedy směry na 2 dané body a délky k oběma těmto bodům.

Z grafických i numerických výsledků (obr. 5-7, tab. 15-17) je možno vyslovit dvě zjištěné skutečnosti:

1. S jednou nadbytečnou veličinou bylo dosaženo zvýšení přesnosti v určení polohy přechodného stanoviska. Tento závěr byl předpokládán, neboť se vzrůstajícím počtem měření roste i pravděpodobnost získání věrohodnějšího výsledku. To platí zejména tehdy, je-li soubor měření velmi malý.
2. Přeurením se v jistém smyslu snižuje závislost na rozložení daných bodů, a to výrazně, je-li volba daných bodů provedena (teoreticky) nesprávně.

V případě varianty 1 (obr. 1) – varianta nevhodná pro úlohu protínání z délek, je výsledek při porovnání apriorních σ_{xy} 9,3-krát příznivější, než (nesprávně) použitá metoda protínání z délek a 1,4-krát příznivější než úloha rajón z určovaného bodu.

V případě varianty 2 (obr. 1) – varianta nevhodná pro úlohu rajón z určovaného bodu, je výsledek při porovnání apriorních σ_{xy} 4,3-krát příznivější než úloha rajón z určovaného bodu a srovnatelný s metodou protínání z délek.

Přestože jsou tyto úvahy pouze teoretické, je jistě možné promítnout je i do praktické sféry. K nevhodné volbě rozložení daných bodů by v praxi nemělo vůbec docházet. Taková volba může mít původ buďto v neznalosti měřiče, nebo tehdy, nemá-li měřič jinou možnost. V takové situaci je proto úsudek měřiče velmi důležitý. Je nutno zvážit, jestli podmínky budou dostačující pro danou přesnost měření, nebo bude výhodnější zvolit jinou metodu.

Literatura

- [1] Dušek R., Vlasák J.: Geodézie 40. *Skriptum ČVUT Praha, 1998, 127 s.*
- [2] Krajník E.: Maticový počet. *Skriptum ČVUT Praha, 1998, 129 s.*

Summary

In geodesy, and in technical practice as well, some numerical problems may occur which are appointed by a minimum number of mensurations (appointed task or problem) or by a certain number of redundant mensurations (over determination task or problem). If there are numerous mensurations by which the task is cause determined, a single computation might be determined, for instances by means of application of least square method, and then an a posteriori characterization of accuracy can be obtained. On the contrary, if there is a minimum number of the mensurations, it is possible to determine an a posteriori accuracy from the known a priori accuracy characterization by using the model of geodetic tasks described for instance in [1]. By this method a mathematical relation of five matrices is determined, computation itself is defined by the relation (1).

A different situation may occur if the task is cause determined, but the cause determined mensurations are not so numerous as to enable application of a least square method, e.g. there is but one cause determined quantity. An application of least square method would be wrong, because the conditions of normal dividing of accidental quantities into a mensuration file would not be qualified. The overdetermination would be singular, if for a geodetic problem a single error model have been applied. An error model of geodetic problem can be applied only in case of removal of such singularity. One of possibilities of how to remove the singularity is computation of a pseudoinverse matrix, e.g. by a singular reduction.

In the article an analysis of accuracy of geodetic problem of “free position” with a minimum number of mensurations is presented, i.e. of a problem being cause determined by a single quantity. It is justified by the fact that this variation occurs very frequently in practice. With a minimum number of measured quantities the analysis can be added by means of “intersection into lengths” of task, as the computation of this task can be overdetermined at some reliable conditions.

This solution can be made for diverse configurations of given points to a given point (detailed variations are depicted in Fig. 1). The aim of the analysis discussed by this article is to ascertain how big the specification with cause determination of task by a single quantity is, especially in situations where the configuration of given points is not much apposite to the point to be determined.

Results of each variation are depicted graphically (see Fig. 5 through 7) and numerically (charts N° 15 through 17). By the results the fact is demonstrated that in some variations a minimum of cause determinations could lead to a big specification in examples studied with not much apposite configuration of given points to a point being determined. Although such configurations are not convenient, they may occur in practice. In this case it is suitable to take into consideration the accuracy of given task, whether the accuracy is adequate for given purpose or whether it is better to select a different measuring method.

Recenzenti: Ing. Jan Ratiborský, CSc., Fakulta stavební, ČVUT Praha,
Prof. Ing. Štefan Sokol, Ph.D., Stavební fakulta, STU Bratislava.